

Skript zur Vorlesung Optimierung I  
Sommersemester 2005

Prof. Rüdiger Frey

vorläufige Version  
Kommentare und Korrekturen erwünscht

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mathematische Hilfsmittel</b>	<b>2</b>
1.1	Konvexe Mengen . . . . .	2
1.2	Konvexe Funktionen . . . . .	4
1.3	Trennungssätze für konvexe Mengen . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Grundlagen der linearen Optimierung</b>	<b>13</b>
2.1	Lineare Programme und Standardform . . . . .	13
2.2	Existenzsatz für lineare Programme . . . . .	15
2.3	Dualitätstheorie für lineare Programme . . . . .	17
2.3.1	Motivation . . . . .	17
2.3.2	Das Duale Problem . . . . .	19
2.3.3	Dualitätstheorie . . . . .	21
2.4	Anwendung von Farkas-Lemma und Dualitätstheorie in einem Ein- Perioden Finanzmarktmodell . . . . .	23
2.4.1	Das Modell . . . . .	23
2.4.2	Arbitragefreiheit und Zustandspreise . . . . .	25
2.4.3	Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten . . . . .	27
2.4.4	Die Superhedging-Dualität . . . . .	28
2.5	Die Struktur von Polyedern . . . . .	30
2.5.1	Extremalpunkte, Ecken und zulässige Basislösungen . . . . .	31
2.5.2	Polyeder in Standardform . . . . .	33
2.5.3	Degeneriertheit . . . . .	35
2.5.4	Benachbarte Basislösungen . . . . .	35
2.5.5	Existenz von Extremalpunkten . . . . .	35
2.5.6	Optimalität von Extremalpunkten . . . . .	36

<b>3</b>	<b>Das Simplex-Verfahren</b>	<b>38</b>
3.1	Optimalitätsbedingungen . . . . .	38
3.2	Das Simplexverfahren . . . . .	40
3.3	Implementation des Simplex-Verfahrens . . . . .	43
3.3.1	Basiswechsel und elementare Zeilenoperationen . . . . .	43
3.3.2	Das revidierte Simplexverfahren . . . . .	44
3.3.3	Die Implementation mittels Simplex-Tableau . . . . .	45
3.4	Degeneriertheit und der Simplexalgorithmus . . . . .	49
3.4.1	Probleme bei Degeneriertheit . . . . .	49
3.4.2	Vermeidung von Zyklen durch geeignete Pivotregeln . . . . .	49
3.5	Bestimmen einer zulässigen Startlösung . . . . .	50
3.6	Performance des Simplex-Algorithmus . . . . .	51
3.7	Dualität und das Simplexverfahren . . . . .	52
3.7.1	Primale und duale Optimalität . . . . .	52
3.7.2	Die duale Simplexmethode . . . . .	53

# Kapitel 1

## Mathematische Hilfsmittel

In diesem Kapitel behandeln wir mathematische Eigenschaften von konvexen Mengen und Funktionen. Diese sind ein wichtiges Hilfsmittel in der Optimierung, denn die Zielfunktion oder der zulässige Bereich eines Optimierungsproblems sind oft konvex.

### 1.1 Konvexe Mengen

**Definition 1.1.** Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *konvex*, falls mit  $\mathbf{x} \in M$  und  $\mathbf{y} \in M$  auch  $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in M$  für alle  $\lambda \in [0, 1]$ .

Die Definition einer konvexen Menge ist analog für den Fall  $M \subseteq X$ ,  $X$  ein beliebiger Vektorraum. Die Definition der Konvexität lässt sich auf mehr als 2 Punkte verallgemeinern.

**Lemma 1.2.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und  $m \in \mathbb{N}$ . Falls  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in M$  so ist auch  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{x}_i \in M$  für alle  $\lambda_i \geq 0$  mit  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ .

*Beweis.* mit Induktion. □

Man kann jeder Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eindeutig die von  $M$  erzeugte konvexe Menge zuordnen; diese wird meist als die konvexe Hülle von  $M$  bezeichnet.

**Definition 1.3.** Die *konvexe Hülle* einer Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ist definiert als

$$\text{conv}(M) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i \in M, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Das folgende Lemma zeigt, dass die konvexe Hülle einer Menge  $M$  die kleinste konvexe Menge ist, in der  $M$  enthalten ist.

**Lemma 1.4.** Für eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  gilt

i)  $M \subseteq \text{conv}(M)$

ii)  $\text{conv}(M)$  ist konvex

iii) Für jede konvexe Menge  $\tilde{M}$  mit  $M \subseteq \tilde{M}$  gilt auch  $\text{conv}(M) \subseteq \tilde{M}$ .

*Beweis.* Aussage (i) ist klar. Zum Beweis von (ii) betrachte  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{x}_i \in \text{conv}(M)$ ,  $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^m \gamma_j \mathbf{y}_j \in \text{conv}(M)$ , wobei  $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \in M$ . Sei  $\rho \in (0, 1)$ , dann ist

$$\rho \mathbf{x} + (1 - \rho) \mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \rho \lambda_i \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^m (1 - \rho) \gamma_j \mathbf{y}_j$$

ebenfalls Konvexkombination von Punkten aus  $M$  und somit ein Element von  $\text{conv}(M)$ . Die Aussage (iii) folgt unmittelbar aus Lemma 1.2.  $\square$

**Definition 1.5.** Sei  $M = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$  eine endliche Menge. Dann heißt  $\text{conv}(M) = \text{conv}(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\})$  *endlich erzeugter Polyeder*.

**Definition 1.6.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine konvexe Menge.  $\mathbf{x} \in M$  heißt *Extremalpunkt* von  $M$ , falls  $\mathbf{x}$  nicht als echte Konvexkombination von Punkten aus  $M$  dargestellt werden kann, d.h. falls für jede Darstellung der Form

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{y}_2, \lambda \in (0, 1), \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in M,$$

folgt, dass  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}$ .

**Lemma 1.7.** Ein endlich erzeugtes Polyeder ist die konvexe Hülle seiner Extremalpunkte.

*Beweis.* Sei  $P = \text{conv}(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\})$ . Klar ist, dass die Menge der Extremalpunkte von  $P$  eine Teilmenge von  $M := \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$  ist. Andererseits kann jeder Punkt aus  $M$ , der sich als echte Konvexkombination von anderen Punkten aus  $M$  darstellen lässt, aus  $M$  entfernt werden, ohne  $\text{conv}(M)$  zu verändern. Alle übrig bleibenden Punkte von  $M$  sind dann Extremalpunkte von  $\text{conv}(M)$ .  $\square$

**Definition 1.8.**

i) Eine Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *konvexer Kegel*, falls  $K$  konvex, und falls  $\forall \lambda > 0$  gilt, dass mit  $\mathbf{y} \in K$  auch  $\lambda \mathbf{y} \in K$ .

ii) Sei  $M = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann heißt

$$\text{pos}(M) = \text{pos}(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{x}_i, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

der von  $M$  erzeugte konvexe Kegel (Man sieht leicht, dass  $\text{pos}(M)$  tatsächlich ein konvexer Kegel ist.)

**Beispiel 1.9.** Sei  $A$  eine  $(m \times n)$ -Matrix. Dann ist  $K := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geq 0, A\mathbf{x} = 0\}$  ein konvexer Kegel.

**Definition 1.10.** Seien  $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$  nicht leer. Dann ist die *direkte Summe*  $M + N$  definiert als  $M + N := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{x} \in M, \mathbf{y} \in N \text{ mit } \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}\}$ .

**Lemma 1.11.**  $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$  konvexe Mengen. Dann ist  $M \cap N$  und  $M + N$  konvex.

Der Beweis ist eine einfache Übung. Es gilt sogar, dass der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen wieder konvex ist.

## 1.2 Konvexe Funktionen

**Definition 1.12.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex. Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt konvex, falls für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$  gilt, dass

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y}), \lambda \in [0, 1].$$

**Bemerkung 1.13.** 1.) Seien  $g_1, \dots, g_r : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Dann ist die Menge  $\{\mathbf{z} \in M : g_i(\mathbf{z}) \leq 0, 1 \leq i \leq r\}$  konvex; diese Menge beschreibt oft den zulässigen Bereich eines Optimierungsproblems.

2.) Falls  $f$  konvex, so gilt  $\forall r \in \mathbb{N}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$  die Ungleichung

$$f\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{x}_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(\mathbf{x}_i).$$

Der nächste Satz zeigt, dass die Extrempunkte bei der Optimierung konvexer Funktionen über einen endlich erzeugten Polyeder eine besondere Rolle spielen.

**Satz 1.14.** Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  konvex und  $P \subseteq D$  ein endlich erzeugtes Polyeder mit Extrempunkten  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$ . Dann gilt für jedes  $\mathbf{x} \in P$  die Abschätzung  $f(\mathbf{x}) \leq \gamma := \max\{f(\mathbf{x}_i), 1 \leq i \leq r\}$ .

*Beweis.* Da das Polyeder die konvexe Hülle seiner Extrempunkte ist, gibt es für  $\mathbf{x} \in P$  eine Darstellung der Form  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{x}_i, \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1$ . Damit gilt

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{x}_i\right) \leq \sum_{i=1}^r \lambda_i f(\mathbf{x}_i) \leq \sum_{i=1}^r \lambda_i \gamma = \gamma.$$

□

**Satz 1.15.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und offen. Dann ist jede konvexe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $D$ .

**Bemerkung 1.16.** Die Voraussetzung, dass  $D$  offen ist, ist nötig: Sei  $D = [0, 1]$  und  $f$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

$f$  ist konvex auf  $D$ , aber unstetig in  $x = 1$ .

*Beweis.* **a) Vorbereitung.** Fixiere  $\mathbf{x} \in D$ . Da  $D$  offen, gibt es  $r > 0$ , so dass das endlich erzeugte Polyeder  $P$  mit Extrempunkten  $\{\mathbf{x} \pm r \mathbf{e}_i, 1 \leq i \leq n\}$ ,  $\mathbf{e}_i$  der  $i$ -te Einheitsvektor des  $\mathbb{R}^n$ , zu  $D$  gehört. Nach dem vorherigen Satz gilt  $\forall \mathbf{y} \in P$

$$f(\mathbf{y}) \leq \max_{1 \leq i \leq n} f(\mathbf{x} \pm r \mathbf{e}_i) =: \gamma < \infty.$$

Betrachte nun  $r_1 > 0$  genügend klein, so dass  $B_{r_1}(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r_1\} \subseteq P$  und wähle  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x} \in B_{r_1}(\mathbf{x})$ . Wähle nun Punkte  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  als Endpunkte des durch  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  bestimmten Durchmessers von  $B_{r_1}(\mathbf{x})$ . Formal lassen sich  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{z}$  durch die Bedingungen

- $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{w} - \mathbf{x}\| = r_1$
- $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mu(\mathbf{w} - \mathbf{x})$  für ein  $\mu > 0$
- $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{y})$  für ein  $\lambda > 0$

beschreiben. Offenbar gilt  $\lambda = \mu$  und  $0 < \lambda \leq 1$ .

**b) Abschätzung von  $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})$  nach unten.** Da  $\mathbf{x}\mathbf{y} + (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{y} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x})$  folgt durch Umstellen  $\mathbf{x} = \frac{1}{1+\lambda} \mathbf{y} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \mathbf{z}$ . Die Konvexität von  $f$  impliziert also

$$f(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{(1+\lambda)} f(\mathbf{y}) + \frac{\lambda}{1+\lambda} f(\mathbf{z})$$

und, da  $f(\mathbf{z}) \leq \gamma$ , nach Umstellen,  $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq \lambda(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})) \geq \lambda(f(\mathbf{x}) - \gamma)$ .

**c) Abschätzung von  $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})$  nach oben.** Da  $\mu = \lambda$  folgt

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \lambda(\mathbf{w} - \mathbf{x}) = \lambda\mathbf{w} + (1 - \lambda)\mathbf{x}.$$

Aufgrund der Konvexität von  $f$  gilt somit  $f(\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{w}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x})$ , also  $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \leq \lambda(f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{x})) \leq \lambda(\gamma - f(\mathbf{x}))$ .

Fassen wir Schritt b) und c) zusammen so gilt also  $|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| \leq \lambda(\gamma - f(\mathbf{x}))$ . Für  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$  folgt  $\lambda \rightarrow 0$  und somit  $|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| \rightarrow 0$ .  $\square$

Im eindimensionalen Fall sind weitergehende Aussagen möglich.

**Satz 1.17.** Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  konvex. Dann existieren überall in  $\text{Int}(D)$  die links- und rechtsseitige Ableitung, definiert durch

$$f'_- = \lim_{h \geq 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{(-h)} \text{ bzw. } f'_+ = \lim_{h \geq 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (1.1)$$

und für  $x < y$  gilt  $f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$ .

**Bemerkung 1.18.**  $f'_+$  kann als Verteilungsfunktion eines – nicht notwendig endlichen – Maßes angesehen werden.

*Beweis.* Betrachte  $a, b, c \in D$  mit  $a < b < c$ . Da  $b = \frac{c-b}{c-a}a + \frac{b-a}{c-a}c$ , gilt

$$f(b) \leq \frac{c-b}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c), \quad (1.2)$$

und damit

$$f(b) - f(a) \leq \frac{a-b}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c) = \frac{b-a}{c-a}(f(c) - f(a))$$

Dies impliziert

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c-a}. \quad (1.3)$$

Analog erhält man aus (1.2) die Ungleichung

$$\frac{f(c) - f(b)}{c-b} \geq \frac{f(c) - f(a)}{c-a}, \quad (1.4)$$

und durch Kombination schließlich

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c-b}. \quad (1.5)$$

(1.2) - (1.5) impliziert, dass der links (rechts)-seitige Differentenquotient  $\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}$  monoton in  $h$  fällt (wächst). Außerdem ist der linksseitige Quotient immer kleiner als der rechtsseitige, woraus die Existenz des Grenzwerts und die Ungleichung  $f'_-(x) \leq f'_+(x)$  folgt. Außerdem folgt aus unseren Ungleichungen für beliebige  $a < b < c < d$ , dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c) - f(d)}{c-d};$$

da die linke Seite  $\geq f'_+(a)$  und die rechte Seite  $\leq f'_-(d)$  ist, folgt  $f'_+(a) < f'_-(d)$  und weil  $a, b, c, d$  beliebig waren die Behauptung.  $\square$

**Folgerung 1.19.**

- i) Eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist konvex genau dann, wenn  $f'$  monoton wachsend ist.*



ii) Eine zweimal differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist konvex genau dann, wenn gilt, dass  $f'' \geq 0$  auf  $\mathbb{R}$ .

**Folgerung 1.20.**  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig auf dem Inneren von  $D$ .

*Beweis.* Wähle Punkte  $a < x < y < b$  so, dass  $[a, b] \subseteq \text{Int}(D)$ . Nach dem vorherigen Satz ist

$$f'_+(a) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y) \leq f'_-(b).$$

Daraus folgt, dass  $|f(y) - f(x)| \leq \max\{-f'_+(a), f'_-(b)\}|y - x|$ . □

**Folgerung 1.21.** Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Dann ist  $f$  fast überall in  $\text{Int}(D)$  differenzierbar, und für  $x, x_0 \in \text{Int}(D)$  gilt

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'_+(y) dy = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'_-(y) dy.$$

*Beweisskizze.*  $f$  diffenzierbar in  $x \Leftrightarrow f'_-(x) = f'_+(x) \Leftrightarrow f'_-, f'_+$  in  $x$  stetig. Da  $f'_-$  und  $f'_+$  monoton sind, haben diese Funktionen nur abzählbar viele Sprungstellen. Der Rest folgt, da  $f$  lokal Lipschitz, aus dem Differentiationsatz von Lebesgue. □

Die folgende Konstruktion ist nützlich für viele konvexe Optimierungsprobleme.

**Definition 1.22.** Betrachte eine Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Die *Fenchel-Légendre Transformation* von  $f$  ist die Funktion  $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  mit

$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{y}'\mathbf{x} - f(\mathbf{x}).$$

**Proposition 1.23.** Definiere  $\text{dom } f^* := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : f^*(\mathbf{y}) < \infty\}$ . Dann gilt

1.  $\text{dom } f^*$  ist konvex und  $f^*$  ist konvex auf  $\text{dom } f^*$ .
2. Es gilt für  $\mathbf{x} \in D, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , dass  $\mathbf{y}'\mathbf{x} \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$ .
3. Definiere  $f^{**} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  als Fenchel Légendre-Transformierte von  $f^* : \text{dom } f^* \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt für  $\mathbf{x} \in D$ , dass  $f^{**}(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$ .
4. Für  $f, D$  konvex gilt  $f^{**}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D$ .

*Beweis. zu 1.* Definiere für  $\mathbf{x} \in D$  die Funktion  $g_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}'\mathbf{x} - f(\mathbf{x})$ . Dann ist  $g_{\mathbf{x}}$  eine affine Funktion in  $\mathbf{y}$ , und somit konvex; die Behauptung folgt also aus der Beziehung  $f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in D} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$  und der Tatsache, dass das Supremum konvexer Funktionen konvex ist.

**zu 2.** Nach Definition von  $f^*$  gilt für  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in D$

$$\mathbf{y}'\mathbf{x} = \mathbf{y}'\mathbf{x} - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbf{x} \in D} \{\mathbf{y}'\mathbf{x} - f(\mathbf{x})\} + f(\mathbf{x}) = f^*(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x}).$$

**zu 3.** Nach 2. gilt für jedes  $\mathbf{x}_0 \in D, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  die Ungleichung  $f(\mathbf{x}_0) \geq \mathbf{x}'_0 \mathbf{y} - f^*(\mathbf{y})$ . Da die linke Seite der Ungleichung unabhängig von  $\mathbf{y}$  ist, folgt

$$f(\mathbf{x}_0) \geq \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \{\mathbf{x}'_0 \mathbf{y} - f^*(\mathbf{y})\} = f^{**}(\mathbf{y}).$$

**zu 4.** Hier benutzen wir das folgende Lemma.

**Lemma 1.24.** Falls  $f$  konvex können wir zu jeden  $\mathbf{x}_0 \in D$  ein  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  finden mit  $(\mathbf{y}_0)' \mathbf{x}_0 = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}} \mathbf{y}'_0 \mathbf{x} - f(\mathbf{x})$ .

Wir beweisen dieses Lemma zunächst für  $n = 1$ ; der allgemeine Fall wird als Anwendung der Trennungssätze für konvexe Mengen behandelt. Wir suchen  $y \in \mathbb{R}$  mit  $yx - f(x)$  wachsend für  $x < x_0$  und fallend für  $x > x_0$ . Falls  $f$  differenzierbar, so ist  $y$  Lösung der Gleichung.

$$\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=x_0} (yx - f(x)) = 0, \text{ und somit folgt } y = f'(x_0).$$

Für allgemeines  $f$  wählen wir ein beliebiges  $y$  aus dem Intervall  $[f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ ; jede derartige Wahl erfüllt die Anforderung des aufgrund von Satz 1.17.

Lemma 1.24 impliziert unmittelbar Aussage 4, denn es gilt mit  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$  wie in Lemma 1.24

$$f^{**}(\mathbf{x}_0) = \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d} \{\mathbf{x}'_0 \mathbf{y} - f^*(\mathbf{y})\} \geq \mathbf{x}'_0 \mathbf{y}_0 - f^*(\mathbf{y}_0) = \mathbf{x}'_0 \mathbf{y}_0 - (\mathbf{y}'_0 \mathbf{x}_0 - f(\mathbf{x}_0)) = f(\mathbf{x}_0).$$

□

**Beispiel 1.25.**

a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2, x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $(yx - f(x))' = 0 \Leftrightarrow y = x$ . Daraus folgt  $f^*(x) = y^2 - f(y) = \frac{1}{2}y^2$ .

b)  $f(x) = |x|$ . In diesem Fall gilt

$$yx - |x| = \begin{cases} x(y - 1), & x \geq 0 \\ x(y + 1), & x < 0 \end{cases}.$$

Falls  $y < -1$  oder  $y > +1$ , so ist also  $f^*(y) = \infty$ . Für  $y \in [-1, 1]$  folgt  $yx - |x| \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  und somit  $f^*(y) = y0 - f(0) = 0$ . Also:

$$f^*(y) = \begin{cases} +\infty & , y < -1, \\ 0 & , -1 \leq y \leq 1, \\ +\infty & , y > 1. \end{cases}$$

### 1.3 Trennungssätze für konvexe Mengen

**Ziel:** Für jede konvexe Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und jedes  $\hat{\mathbf{x}} \notin A$  gibt es eine Hyperebene  $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}'\mathbf{x} = \beta, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}, \|\mathbf{a}\| = 1\}$ , so dass  $\mathbf{a}'\hat{\mathbf{x}} \leq \beta$  und  $\mathbf{a}'\mathbf{y} \geq \beta \forall \mathbf{y} \in A$ .

Wir beweisen zunächst eine etwas schwächere Aussage.

**Satz 1.26.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen, nicht leer, konvex. Dann gibt es für jedes  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n, \hat{\mathbf{x}} \notin A$  eine Hyperebene  $H$  der Form  $H\{\mathbf{x} : \mathbf{a}'\mathbf{x} = \beta, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{a}\| = 1, \beta \in \mathbb{R}\}$ , so dass  $\mathbf{a}'\hat{\mathbf{x}} < \beta$ ; und  $\mathbf{a}'\mathbf{y} > \beta \forall \mathbf{y} \in A$ .

*Beweis.* Definiere  $\rho(\hat{\mathbf{x}}, A) := \inf\{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in A\}$ . Der Beweis des Satzes erfolgt nun in 3 Schritten.

i)  $\exists \hat{\mathbf{y}} \in A, \rho(\hat{\mathbf{x}}, A) = \|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|$  : Weil  $\rho(\hat{\mathbf{x}}, A) = \rho(\hat{\mathbf{x}}, A \cap \{\mathbf{y}, \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq R\})$  für  $R$  genügend groß, können wir annehmen, dass  $A$  kompakt ist. Daher nimmt die stetige Funktion  $\mathbf{y} \rightarrow \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|$  ihr Minimum in einem Punkt  $\hat{\mathbf{y}}$  an. Weil  $\hat{\mathbf{x}} \in A$ , ist  $\hat{\mathbf{x}} \neq \hat{\mathbf{y}}$  und somit  $\|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\| > 0$ .

ii)  $\forall \mathbf{y} \in A$  gilt  $(\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}})'\hat{\mathbf{y}} \leq (\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}})'\mathbf{y}$ . Definiere für  $\mathbf{y} \in A$  und  $\lambda \in [0, 1]$  die Funktion  $Z_{\mathbf{y}}(\lambda) := \|\hat{\mathbf{x}} - (\lambda\hat{\mathbf{y}} + (1-\lambda)\mathbf{y})\|^2$ . Weil der minimale Abstand von  $\hat{\mathbf{x}}$  zu  $A$  in  $\hat{\mathbf{y}}$  angenommen wird und weil für  $\lambda \in [0, 1]$  die Konvexkombination  $\lambda\hat{\mathbf{y}} + (1-\lambda)\mathbf{y}$  in  $A$  liegt, gilt  $\frac{\partial}{\partial \lambda}|_{\lambda=1} Z_{\mathbf{y}}(\lambda) \leq 0$ . Nun folgt

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}|_{\lambda=1} Z_{\mathbf{y}}(\lambda) = 2(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}).$$

Dies ist  $\leq 0 \Leftrightarrow (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})'\mathbf{y} \leq (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})'\hat{\mathbf{y}}, \Leftrightarrow (\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}})'\hat{\mathbf{y}} \leq (\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}})'\mathbf{y}$ .

iii) Definiere  $\mathbf{a} := \frac{\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}}}{\|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}}\|}$  und  $\beta := \frac{1}{2}\mathbf{a}'(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$ . Nach ii) ist  $\mathbf{a}'\hat{\mathbf{y}} \leq \mathbf{a}'\mathbf{y} \forall \mathbf{y} \in A$ . Außerdem gilt  $\mathbf{a}'\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{a}'\left(\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})\right) = \beta - \frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}}\| < \beta$  und

$$\beta = \frac{1}{2}\mathbf{a}'(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{a}'\left(\hat{\mathbf{y}} - \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}})\right) = \mathbf{a}'\hat{\mathbf{y}} - \frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}}\| < \mathbf{a}'\hat{\mathbf{y}}.$$

□

**Lemma 1.27.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  nicht leer, konvex und abgeschlossen. Sei  $\mathbf{x}_n, n \in \mathbb{N}$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \hat{\mathbf{x}}$  und  $\mathbf{x}_n \in A^c \forall n$ . Dann gibt es  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{a}\| = 1$  und  $\beta \in \mathbb{R}$ , so dass  $\mathbf{a}'\hat{\mathbf{x}} \leq \beta \leq \mathbf{a}'\mathbf{y} \forall \mathbf{y} \in A$ .

*Beweis.* Nach dem vorausgehenden Satz gibt es zu jedem  $\mathbf{x}_n$  ein  $\mathbf{a}_n, \|\mathbf{a}_n\| = 1$ , und ein  $\beta_n$  mit

$$\mathbf{a}'_n \mathbf{x}_n < \beta_n < \mathbf{a}'_n \mathbf{y} \text{ für alle } \mathbf{y} \in A.$$

Wähle nun eine Teilfolge  $n'$  mit  $\lim_{n' \rightarrow \infty} \mathbf{a}_{n'} = \mathbf{a}$  für ein  $\mathbf{a}$  mit  $\|\mathbf{a}\| = 1$  und  $\lim_{n' \rightarrow \infty} \beta_{n'} = \beta$ . Dies ist möglich, da der Einheitskreis kompakt und die Menge

$\{\mathbf{a}'_n \mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt ist. Damit gilt  $\mathbf{a}'\hat{\mathbf{x}} = \lim_{n' \rightarrow \infty} \mathbf{a}'_{n'} \mathbf{x}_{n'} \leq \beta$ ; für beliebiges  $\mathbf{y} \in A$  folgt

$$\mathbf{a}'\mathbf{y} = \lim_{n' \rightarrow \infty} \mathbf{a}'_{n'} \mathbf{y} \geq \lim_{n' \rightarrow \infty} \beta_{n'} = \beta.$$

□

**Lemma 1.28.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex,  $\mathbf{x} \notin A$ . Dann gibt es eine Folge  $\mathbf{x}_n, n \in \mathbb{N}$  von Vektoren aus  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$  mit  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ .

*Beweis.* Falls  $\mathbf{x} \notin \bar{A}$  ist die Aussage klar. Falls  $\mathbf{x} \in \bar{A}$ , so betrachte  $n$  Punkte  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \in A$ , so dass die Vektoren  $\mathbf{w}_i := \mathbf{x} - \mathbf{y}_i, 1 \leq i \leq n$ , linear unabhängig sind. Falls es derartige Punkte nicht gibt, so liegt  $A$  in einer Hyperebene, wie man leicht sieht, und die Aussage ist klar. Andernfalls betrachte die Menge  $M := \{\mathbf{x}\} + K$  mit  $K = \text{pos}(\{\mathbf{w}_i, 1 \leq i \leq n\})$ . Da  $\mathbf{x} \notin A$  folgt  $M \cap A = \emptyset$  (sonst leitet man unmittelbar einen Widerspruch zur Konvexität von  $A$  her). Daher folgt  $\bar{A} \cap \text{Int}(M) = \emptyset$ . Das Lemma folgt, da  $\mathbf{x}$  durch Punkte aus  $\text{Int}(M)$  approximiert werden kann. □

**Folgerung 1.29.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex,  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus A$ . Dann gibt es  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{a}\| = 1$  und  $\beta \in \mathbb{R}$ , so dass  $\mathbf{a}'\hat{\mathbf{x}} \leq \beta \leq \mathbf{a}'\mathbf{y}$  für jedes  $\mathbf{y} \in A$ .

*Beweis.* Die Behauptung folgt unmittelbar durch Kombination der beiden vorausgehenden Lemmata. □

**Satz 1.30 (Trennungssatz für konvexe Mengen).** Seien  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  nichtleere konvexe Mengen mit  $A \cap B = \emptyset$ . Dann gibt es  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{a}\| = 1$  und eine Konstante  $\beta$  so, dass  $\forall \mathbf{y} \in A, \mathbf{z} \in B$  gilt  $\mathbf{a}'\mathbf{y} \leq \beta \leq \mathbf{a}'\mathbf{z}$ . Ist  $\mathbf{y}$  aus dem Inneren von  $A$ , so gilt  $\mathbf{a}'\mathbf{y} < \beta \leq \inf\{\mathbf{a}'\mathbf{z} : \mathbf{z} \in B\}$ ; ist  $\mathbf{z}$  aus dem Inneren von  $B$  so gilt  $\mathbf{a}'\mathbf{z} > \sup\{\mathbf{a}'\mathbf{y} : \mathbf{y} \in A\}$ .

*Beweis.* Definiere  $C := \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{y}, \mathbf{z} \in B, \mathbf{y} \in A\}$ . Man rechnet sofort nach, dass  $C$  konvex ist. Nach dem vorherigen Korollar gibt es also - da  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  nicht zu  $C$  gehört - ein  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{a}\| = 1$  mit  $\mathbf{a}'\mathbf{0} = \mathbf{0} \leq \mathbf{a}'\mathbf{x} \forall \mathbf{x} \in C$ , d.h.  $0 \leq \mathbf{a}'(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \forall (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in A \times B$ . Dies impliziert, dass  $\inf\{\mathbf{a}'\mathbf{z} : \mathbf{z} \in B\} \geq \sup\{\mathbf{a}'\mathbf{y} : \mathbf{y} \in A\}$ . Der Rest ist klar. □

## Anwendung 1 (Epigraphen und Fenchel-Légendre Transformation.)

**Definition 1.31.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  konkav, d.h.

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \geq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D, \lambda \in [0, 1].$$

Dann heißt die Menge  $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $E = \{\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, y) \in D \times \mathbb{R} : y < f(\mathbf{x})\}$  Epigraph von  $f$ .

Man rechnet unmittelbar nach, dass  $E$  konvex ist. Im folgenden verwenden wir für  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+1}$  die Schreibweise  $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, y)'$  mit  $\mathbf{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n), y = \tilde{x}_{n+1}$ .

Folgendes Lemma haben wir im Beweis von Proposition 1.23 (Eigenschaften der Fenchel-Légendre-Transformation) verwendet; wir wollen jetzt den Beweis nachholen.

**Lemma 1.32.** *Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konvex,  $\mathbf{x}_0 \in D$ . Dann gibt es  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{y}'_0 \mathbf{x}_0 - f(\mathbf{x}_0) \geq \mathbf{y}'_0 \mathbf{x} - f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in D$ .*

*Beweis.* Definiere die konkave Funktion  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ . Sei  $E$  der Epigraph von  $\tilde{f}$ . Da  $\tilde{\mathbf{x}}_0 := (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))' \notin E$  gibt es nach dem Trennungssatz einen Vektor  $\tilde{\mathbf{x}} \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\tilde{\mathbf{a}}' \tilde{\mathbf{x}}_0 > \tilde{\mathbf{a}}' \tilde{\mathbf{x}}$  für jedes  $\tilde{\mathbf{x}} \in \text{Int}(E)$  oder, ausgeschrieben,

$$\mathbf{a}' \mathbf{x}_0 + a_{n+1} \tilde{f}(\mathbf{x}_0) > \mathbf{a}' \mathbf{x} + a_{n+1} x_{n+1} \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, x_{n+1})' \in E. \quad (1.6)$$

Wählen wir speziell  $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_0, \tilde{f}(\mathbf{x}_0) = -\epsilon) \in E$ , so folgt durch Einsetzen in (1.6), dass  $a_{n+1} > 0$  gelten muss. Wir können also oBdA annehmen, dass  $a_{n+1} = 1$ , indem wir  $\tilde{\mathbf{a}}$  geeignet normieren. In diesem Fall leistet  $\mathbf{y} := (a_1, \dots, a_n)'$  das Gewünschte, wie unmittelbar aus (1.6) folgt.  $\square$

**Anwendung 2. (Stützfunktion einer konvexen Menge.)** Die folgende Funktion ist ein nützliches Hilfsmittel bei der Optimierung von Funktionen über konvexe Mengen.

**Definition 1.33.** Für eine Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt die Abbildung  $\delta^*(\cdot | C) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $\delta^*(\mathbf{y} | C) = \sup\{\mathbf{y}' \mathbf{x} : \mathbf{x} \in C\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  *Stützfunktion* von  $C$ ;  $K_C = \text{dom } \delta^*(\cdot | C) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \delta^*(\mathbf{y} | C) < \infty\}$  heißt Schrankenkegel von  $C$ .

**Bemerkung 1.34.** i) Man rechnet leicht nach, dass  $\delta^* : K_C \rightarrow \mathbb{R}$  konvex ist und dass  $K_C$  ein konvexer Kegel ist.

ii)  $\delta^*(\cdot | C)$  ist die Fenchel-Légendre Transformierte der Funktion  $g_C(x)$  mit  $g_C(\mathbf{x}) = 0$  für  $\mathbf{x} \in C$  und  $g_C(\mathbf{x}) = \infty$  für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus C$ .

**Beispiel 1.35.**  $C = [0, \infty] \Rightarrow K_C = [-\infty, 0]$  und  $\delta^*(y | C) = \begin{cases} \infty, & y > 0 \\ 0, & y \in K_C \end{cases}$ .

Nach Definition gilt  $\delta^*(\mathbf{y} | C) \leq \beta \Leftrightarrow C \subseteq \{\mathbf{x} : \mathbf{y}' \mathbf{x} \leq \beta\}$ , d.h.  $C$  ist Teilmenge des Halbraumes  $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y}' \mathbf{x} \leq \beta\} \Leftrightarrow \delta^*(\mathbf{y} | C) \leq \beta$ . Weil eine konvexe Menge  $C$  als Schnitt aller Halbräume, in denen  $C$  enthalten ist, beschrieben werden kann, wird eine konvexe Menge im wesentlichen durch die zugehörige Stützfunktion beschrieben. Der folgende Satz präzisiert diese Beobachtung.

**Satz 1.36.** *Sei  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex. Dann gilt*

- i)  $\hat{\mathbf{x}} \in \overline{C} \Leftrightarrow \delta^*(\mathbf{y} | C) \geq \mathbf{y}' \hat{\mathbf{x}}$  für alle  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .
- ii)  $\hat{\mathbf{a}} \in \text{Int}(C) \Leftrightarrow \delta^*(\mathbf{y} | C) > \mathbf{y}' \hat{\mathbf{x}}$  für alle  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

*Beweis.* Zu Aussage i). Falls  $\hat{\mathbf{x}} \in C$ , so gilt  $\mathbf{y}'\hat{\mathbf{x}} \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{y}'\mathbf{x} \delta^*(\mathbf{y} \mid C)$ . Falls  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{C}$ , so liefert der Trennungssatz für konvexe Mengen die Existenz von  $\mathbf{y}$  mit  $\|\mathbf{y}\| = 1$  und von  $\beta \in \mathbb{R}$ , so dass  $\mathbf{y}'\hat{\mathbf{x}} > \beta > \mathbf{y}'\mathbf{x}$  für alle  $\mathbf{x} \in C$ , d.h. es gibt  $\delta^*(\mathbf{y} \mid C) \leq \beta < \mathbf{y}'\hat{\mathbf{x}}$ .

Die zweite Aussage zeigt man analog, unter Verwendung der Tatsache, dass  $\text{Int}(C)$  konvex, falls  $C$  konvex.  $\square$

**Folgerung 1.37.** Sei  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen, konvex und nicht-leer. Dann gilt  $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y}'\mathbf{x} \leq \delta^*(\mathbf{y} \mid C) \text{ für alle } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\}$ .

## Kapitel 2

# Grundlagen der linearen Optimierung

### 2.1 Lineare Programme und Standardform

Unter einem linearen Programm in allgemeiner Form versteht man das folgende Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x} \in P \subseteq \mathbb{R}^n} \mathbf{c}'\mathbf{x} = c_1x_1 + \dots + c_nx_n ,$$

wobei der zulässige Bereich  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  durch Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen der Form

$$\begin{array}{rcccccl} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m_1 1}x_1 & + & \dots & + & a_{m_1 n}x_n & \geq & b_{m_1} & \\ a_{m_1+1 1}x_1 & + & \dots & + & a_{m_1+1 n}x_n & = & b_{m_1+1} & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m 1}x_1 & + & \dots & + & a_{m n}x_n & = & b_m & \end{array} \quad (2.1)$$

beschrieben wird.

**Bemerkung 2.1.** Durch Multiplikation mit  $(-1)$  kann man Beschränkungen der Form  $a_{j_1}x_1 + \dots + a_{j_n}x_n \leq b_j$  in Restriktionen mit ' $\geq$ ' transformieren. Verwendet man die Beziehung

$$\max_{\mathbf{x} \in P} \mathbf{c}'\mathbf{x} = - \min_{\mathbf{x} \in P} (-\mathbf{c}')\mathbf{x} ,$$

so lassen sich auch Maximierungsprobleme in Minimierungsprobleme der Form (2.1) transformieren.

**Standardformulierung eines Linearen Programmes.** Jedes lineare Programm (kurz: LP) lässt sich durch das Einführen von Zusatzvariablen in ein LP in Standardform umformen.

**Definition 2.2.** Ein LP der Form  $\min_{\mathbf{x} \in P} \mathbf{c}'\mathbf{x}$  mit  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$  für eine  $m \times n$  Matrix  $A$  und einen Vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  heißt *LP in Standardform*.  $P$  heißt *zulässiger Bereich*. ( $\mathbf{x} \geq 0$  bedeutet  $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ )

Ein LP in Standardform ist nur sinnvoll für  $m \leq n$ , da sonst  $P$  meist leer ist.

**Transformation eines LP auf Standardform.** Ein LP kann in Standardform überführt werden, indem die beiden folgenden Transformationen angewendet werden.

- i) **ELIMINATION VON UNGLEICHUNGSRESTRIKTIONEN:** Führt man in (2.1) die Schlupfvariablen  $y_1, \dots, y_{m_1} \geq 0$  ein, so lassen sich die Ungleichungsrestriktionen in der Form  $a_{j_1}x_1 + \dots + a_{j_n}x_n - y_j = b_j, 1 \leq j \leq m_1$  schreiben.
- ii) **EINFÜHREN VON VORZEICHENRESTRIKTIONEN:** Schreibe  $x_i \in \mathbb{R}$  als  $x_i = x_i^+ - x_i^-$  mit neuen Variablen  $x_i^+, x_i^- \geq 0$  und schreibe das Produkt  $a_{ji}x_i$  als  $a_{ji}x_i^+ + (-a_{ji})x_i^-$ .

**Beispiel 2.3.** Ein Unternehmen hat zwei Lagerhäuser und muss von dort Waren an drei Verkaufsstellen transportieren. Der Bedarf in den Verkaufsstellen ist 4, 3 und 6. Die Transportkosten und der Vorrat in den Lagerhäusern ist gemäß folgender Tabelle gegeben

Verkaufsstelle Lager	1	2	3	Vorrat
1	3	$\infty$	4	6
2	2	4	5	7
Bedarf	4	3	6	

Notation:  $z_{ij}$  ist die Menge, welche von Lager  $i$  zur Verkaufsstelle  $j$  transportiert wird.

Problem: (Transportkostenminimierung)

$$\min 3z_{11} + 4z_{13} + 2z_{21} + 4z_{22} + 5z_{23}$$

bezüglich

$$\begin{aligned} z_{11} + z_{21} &= 4 && \text{(Bedarf an Stelle1)} \\ z_{22} &= 3 && \text{(Bedarf an Stelle2)} \\ z_{13} + z_{23} &= 6 && \text{(Bedarf an Stelle3)} \\ z_{11} + z_{13} &= 6 && \text{(Vorrat in Lager1)} \\ z_{21} + z_{22} + z_{23} &= 7 && \text{(Vorrat in Lager2)} \\ z_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Bemerkung: 1) Die Nebenbedingungen sind Gleichheitsrestriktionen, da der Gesamt-vorrat gleich dem Gesamtbedarf ist.



- 2) Da  $z_{22} = 3$  reduziert sich die letzte Gleichung zu  $z_{21} + z_{23} = 4$ .  
 3) In diesem Spezialfall führt schon die Problemstellung auf ein LP in Standardform.

$z_{11}, z_{1,3}, z_{21}, z_{22}, z_{23}$  sind also Lösungen eines linearen Gleichungssystems (LGS) und müssen zusätzlich die Bedingung  $z_{ij} \geq 0$  erfüllen. Man rechnet leicht nach (etwa mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus), dass die Lösungen des LGS von der Form

$$z_{11} = z_{23}, \quad z_{13} = 6 - z_{23}, \quad z_{21} = 4 - z_{23}, \quad z_{22} = 3 \quad (2.2)$$

sind, also durch  $z_{23}$  parametrisiert werden können. Zulässiger Bereich sind alle Lösungen von (2.2), die nicht-negativ sind.

Die gesamten Transportkosten lassen sich nun leicht als Funktion von  $z_{23}$  darstellen:

$$\begin{aligned} \text{Kosten} &= 3z_{23} + 4(6 - z_{23}) + 2(4 - z_{23}) + 12 + 5z_{23} \\ &= 2z_{23} + 44 \end{aligned}$$

Dies wird minimiert für  $z_{23}$  so klein wie möglich, also  $z_{23} = 0$ . Der optimale Transportplan ist damit gegeben durch

$$z_{11} = 0, z_{12} = 0, z_{13} = 6, z_{21} = 4, z_{22} = 3, z_{24} = 0 .$$

**Bemerkung 2.4.** 1) Es gibt bei linearen Optimierungsproblemen typischerweise Lösungen, bei denen einige Komponenten verschwinden.

2) Wenn der zulässige Bereich höherdimensional ist, so ist ein systematischer Zugang zum Auffinden einer Lösung notwendig.

## 2.2 Existenzsatz für lineare Programme

Es gibt zwei Probleme bei der Lösung von linearen Programmen. Zum einen kann der zulässige Bereich leer sein; zum anderen kann die Zielfunktion nach unten unbeschränkt sein.

Der folgende Satz spielt bei der Analyse der Existenz von Lösungen eine wichtige Rolle.

**Satz 2.5 ( Lemma von Farkas ).** *Sei  $A$  eine  $m \times n$  Matrix und  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i)  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\} \neq \emptyset$
- (ii) Für alle  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  mit  $A'\mathbf{u} \geq 0$  folgt  $\mathbf{b}'\mathbf{u} \geq 0$ .

**Lemma 2.6.**  $K = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \mathbf{x} \geq 0\}$  ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel.

*Beweis.* Man zeigt leicht, dass  $K$  ein konvexer Kegel ist. Die Abgeschlossenheit ist schwieriger zu beweisen; hierfür sei auf die Literatur verwiesen.  $\square$

*Beweis des Farkas-Lemmas.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Betrachte  $\hat{\mathbf{x}}$  mit  $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ ,  $\hat{\mathbf{x}} \geq 0$ . Dann gilt für  $\mathbf{u}$  mit  $A'\mathbf{u} \geq 0$ , dass

$$\mathbf{b}'\mathbf{u} = (A\hat{\mathbf{x}})'\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}}'(A'\mathbf{u}) \geq 0,$$

da  $\hat{\mathbf{x}} \geq 0$ .

(ii) $\Rightarrow$ (i): Definiere  $K = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \mathbf{x} \geq 0\}$ . Nimm an, dass  $\mathbf{b} \notin K$ . Unser Ziel ist es zu zeigen, dass (ii) nicht gilt, d.h. dass ein  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  mit  $A'\mathbf{u} \geq 0$  und  $\mathbf{b}'\mathbf{u} \leq 0$  existiert. Nach Lemma 2.6 ist  $K$  ein abgeschlossener konvexer Kegel. Nach dem Trennungssatz für konvexe Mengen (Satz 1.26) gibt es also ein  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  mit

$$\mathbf{u}'\mathbf{b} < \beta \leq \mathbf{u}'\mathbf{y} \text{ für alle } \mathbf{y} \in K.$$

Da  $\mathbf{0} \in K$  folgt  $\beta \leq 0$ . Also gilt  $\mathbf{u}'\mathbf{b} < 0$ . Andererseits gilt für alle  $\mathbf{y} \in K$ , dass  $\beta \leq \mathbf{u}'\mathbf{y}$ . Da  $K$  ein konvexer Kegel ist, ist dies nur möglich falls  $\mathbf{u}'\mathbf{y} \geq 0$  für alle  $\mathbf{y} \in K$ . Also gilt nach Definition von  $K$  mit  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$

$$0 \leq \mathbf{u}'\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{u} = (A\mathbf{x})'\mathbf{u} = \mathbf{x}'(A'\mathbf{u})$$

für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{x} \geq 0$  und somit auch  $A'\mathbf{u} \geq 0$ . □

**Bemerkung 2.7.** Mit ähnlichen Argumenten kann man auch zeigen, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i)  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} > 0\} \neq \emptyset$

(ii) Für alle  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  mit  $A'\mathbf{u} \geq 0$  und  $A'\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  folgt  $\mathbf{b}'\mathbf{u} > 0$ .

**Beispiel 2.8.** Das folgende Optimierungsproblem ist ein Beispiel für ein LP mit  $P \neq \emptyset$ , das aber keine Lösung hat, weil die Zielfunktion auf  $P$  nach unten unbeschränkt ist.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{bzgl.} \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

**Satz 2.9 (Existenzsatz für lineare Programme).** Gegeben sei ein LP in Standardform, d.h. ein Optimierungsproblem der Form

$$\min_{\mathbf{x} \in P} \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\} \quad (2.3)$$

für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Falls  $P$  nichtleer und falls ein  $\gamma > -\infty$  existiert mit  $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \gamma$  für alle  $\mathbf{x} \in P$ , so existiert eine Lösung des LP's (2.3).

*Beweis.* Wir verwenden wiederum das Farkas-Lemma. Nach Voraussetzung gilt für  $\hat{\gamma} = \inf_{\mathbf{x} \in P} \mathbf{c}'\mathbf{x}$ , dass  $\hat{\gamma} \geq \gamma > -\infty$ . Wir müssen zeigen, dass das Infimum in einem Punkt  $\mathbf{x} \in P$  angenommen wird, d.h. dass

$$\tilde{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{c}'\mathbf{x} = \hat{\gamma}, \mathbf{x} \geq 0\} \neq \emptyset.$$

Definiere  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times n}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{m+1}$  durch  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{c}' \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix}$ . Nach dem Farkas-Lemma gilt  $\tilde{P} \neq \emptyset$  genau dann, wenn für alle  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{m+1}$  mit  $\tilde{A}'\tilde{\mathbf{u}} \geq 0$  auch die Ungleichung  $\tilde{\mathbf{b}}'\tilde{\mathbf{u}} \geq 0$  erfüllt ist. Wir müssen also die letztere Bedingung nachweisen. Sei dazu  $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, \tilde{u}_{m+1})'$  mit  $\tilde{A}'\tilde{\mathbf{u}} = A'\mathbf{u} + \tilde{u}_{m+1}\mathbf{c} \geq 0$  gegeben. Dann gilt für  $\mathbf{x} \in P$

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbf{x}'\tilde{A}'\tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{x}'(A'\mathbf{u} + \tilde{u}_{m+1}\mathbf{c}) = (A\mathbf{x})'\mathbf{u} + \tilde{u}_{m+1}\mathbf{c}'\mathbf{x} \\ &= \mathbf{b}'\mathbf{u} + \tilde{u}_{m+1}\mathbf{c}'\mathbf{x}, \end{aligned}$$

da  $\mathbf{x} \geq 0$ . Daraus folgt  $0 \leq \mathbf{b}'\mathbf{u} + \tilde{u}_{m+1}(\inf_{\mathbf{x} \in P} \mathbf{c}'\mathbf{x}) = \mathbf{b}'\mathbf{u} + \tilde{u}_{m+1}\gamma = \tilde{\mathbf{b}}'\tilde{\mathbf{u}}$ .  $\square$

## 2.3 Dualitätstheorie für lineare Programme

### 2.3.1 Motivation

Die Dualitätstheorie für Optimierungsprobleme kann als Weiterentwicklung der Lagrange-Multiplikatoren, wie sie aus der Optimierung glatter Funktionen unter Gleichungsnebenbedingungen bekannt sind, aufgefaßt werden. Das folgende Beispiel soll die Verwendung der Lagrange-Multiplikatoren illustrieren.

**Beispiel 2.10.** Betrachte die Optimierungsaufgabe  $\min\{x^2 + y^2 \mid x + y = 1\}$ . Um dieses Problem zu lösen, kann man einen Lagrange-Multiplikator  $u \in \mathbb{R}$  einführen und die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, u) = x^2 + y^2 + u(1 - (x + y))$$

betrachten. Man minimiert nun für festes  $u$  die Funktion  $(x, y) \rightarrow L(x, y, u)$  ohne Nebenbedingungen an  $x$  und  $y$ . Die Bedingungen erster Ordnung sind

$$2x - u = 0, \quad 2y - u = 0$$

und somit  $x = y = u/2$ . Die Nebenbedingung  $x + y = 1$  liefert  $u = 1$  und somit die Optimallösung  $x = y = \frac{1}{2}$ .

Die Hauptidee der Lagrange-Multiplikatoren-Methode kann wie folgt zusammengefaßt werden. Anstatt die Nebenbedingung  $x + y = 1$  direkt zu 'erzwingen' (harte Nebenbedingung), lässt man zu, dass die Nebenbedingung verletzt wird und belegt eine mögliche Verletzung der Nebenbedingung mit einem 'Preis'  $u$  (eben dem

Langrange-Multiplikator). Dies führt auf das einfacher lösbare Minimierungsproblem ohne Nebenbedingungen

$$\min\{L(x, y, u) \mid x, y \in \mathbb{R}\} .$$

Für ein geeignet gewähltes  $u$  ist die Lösung auch optimal für das Problem mit Nebenbedingungen.

Im Folgenden wollen wir diese Idee auf lineare Programme übertragen. Insbesondere ordnen wir jeder Nebenbedingung eine Preisvariable  $u$  zu und suchen Werte  $u$ , so dass sich der Optimalwert der Zielfunktion nicht ändert, wenn wir statt des Originalproblems das Problem ohne Nebenbedingungen betrachten. Dies führt auf ein neues Optimierungsproblem, das sogenannte *duale Problem*, dessen Form wir im folgenden motivieren wollen.

Betrachte ein LP in Standardform  $\min_{\mathbf{x} \in P} \mathbf{c}'\mathbf{x}$  mit  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ , das wir von nun an als *primales Problem* (PP) bezeichnen werden. Wir betrachten ein neues ‘abgeschwächtes’ Optimierungsproblem, in dem die Nebenbedingung  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  durch ein Strafterm der Form  $\mathbf{u}'(\mathbf{b} - A\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  ersetzt wird. Wir erhalten also das Optimierungsproblem

$$\min \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{u}'(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) \text{ bzgl. } \mathbf{x} \geq 0 . \quad (2.4)$$

In (2.4) gibt  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  die ‘Kosten’ an, die durch das Verletzen der Nebenbedingung  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  entstehen. Sei  $g(\mathbf{u})$  der Optimalwert der Zielfunktion des Optimierungsproblems (2.4). Setzen wir in (2.4) ein  $\mathbf{x}$  aus dem zulässigen Bereich  $P$  des PP ein, so reduziert sich die Zielfunktion zu  $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ . Da der zulässige Bereich von (2.4) aber größer ist als  $P$ , folgt  $g(\mathbf{u}) \leq \mathbf{c}'\mathbf{x}^*$ , wobei  $\mathbf{x}^*$  eine Lösung des PP ist. Formal gilt

$$g(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{x} \geq 0} (\mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{u}'(\mathbf{b} - A\mathbf{x})) \leq \mathbf{c}'\mathbf{x}^* + \mathbf{u}'(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^*) = \mathbf{c}'\mathbf{x}^* .$$

Für jedes  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  liefert  $g(\mathbf{u})$  also eine untere Schranke für den Optimalwert des PP. Das Optimierungsproblem  $\max_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m} g(\mathbf{u})$  kann also als Suche nach der größten derartigen unteren Schranke interpretiert werden; dieses Problem wird als *duales Problem* (DP) bezeichnet. Das wichtigste Ergebnis der Dualitätstheorie (der Dualitätssatz) besagt, dass der Optimalwert der Zielfunktion im DP und im PP übereinstimmt. Mit anderen Worten, falls  $\mathbf{u}$  als Optimallösung des DP gewählt wird, so führt die Abschwächung der Nebenbedingung  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  nicht zu einer Verringerung des Optimalwertes der Zielfunktion.

Nach Definition von  $g(\mathbf{u})$  haben wir

$$g(\mathbf{u}) = \min\{\mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{u}'(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) : \mathbf{x} \geq 0\} = \mathbf{u}'\mathbf{b} + \min\{(\mathbf{c}' - \mathbf{u}'A)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0\} .$$

Nun ist  $\min\{(\mathbf{c}' - \mathbf{u}'A)\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0\} = 0$ , falls  $\mathbf{c}' - \mathbf{u}'A \geq 0$ ; andernfalls ist dieser Ausdruck gleich  $-\infty$ . Bei der Maximierung von  $g(\mathbf{u})$  müssen wir nur solche Werte

von  $\mathbf{u}$  betrachten, für die  $g(\mathbf{u}) > -\infty$  gilt. Das duale Problem  $\max_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} g(\mathbf{u})$  kann also als LP der Form

$$\max \mathbf{u}'\mathbf{b} \text{ bzgl. } \mathbf{u}'\mathbf{A} \leq \mathbf{c}' \text{ bzw. } \mathbf{A}'\mathbf{u} \leq \mathbf{c}$$

geschrieben werden. Im nächsten Abschnitt verallgemeinern wir diese Definition auf allgemeine lineare Programme (nicht notwendigerweise in Standardform).

### 2.3.2 Das Duale Problem

**Definition 2.11 (Duales Programm).** Betrachte das folgende primale Problem.

$$\begin{array}{llll}
 \text{(PP)} & \min & \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{d}'\mathbf{y} & \text{(Zielfunktion)} \\
 & \text{bzgl.} & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} \geq \mathbf{a} & \text{(Ungleichheitsrestriktionen)} \\
 & & \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y} = \mathbf{b} & \text{(Gleichheitsrestriktionen)} \\
 & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \text{(Vorzeichenrestriktion, } \mathbf{x} \text{ beschränkte,} \\
 & & & \mathbf{y} \text{ freie Variable)}
 \end{array}$$

Dann hat das zugehörige duale Problem (DP) die folgende Form

$$\begin{array}{llll}
 \text{(DP)} & \max & \mathbf{a}'\mathbf{u} + \mathbf{b}'\mathbf{v} & \\
 & \text{bzgl.} & \mathbf{A}'\mathbf{u} + \mathbf{C}'\mathbf{v} \leq \mathbf{c} & \\
 & & \mathbf{B}'\mathbf{u} + \mathbf{D}'\mathbf{v} = \mathbf{d} & \\
 & & \mathbf{u} \geq \mathbf{0} &
 \end{array}$$

#### Regeln zum Wechsel zwischen PP und DP.

- i) Wenn PP ein Minimierungsproblem ist, dann ist DP ein Maximierungsproblem und umgekehrt.
- ii) Ungleichungen mit ' $\geq$ ' werden zu Ungleichungen mit ' $\leq$ ' und umgekehrt, wobei wir als Konvention Minimierungsprobleme nur mit ' $\geq$ '-Ungleichungen und Maximierungsprobleme nur mit ' $\leq$ '-Ungleichungen betrachten.
- iii) Der Vektor der Zielfunktion des primalen Problems wird zur rechten Seite des dualen Problems und die rechte Seite des (PP) wird zum Vektor der Zielfunktion des (DP).
- iv) Die rechte Seite der Ungleichungsrestriktionen im PP ist der Koeffizient der vorzeichenbeschränkten Variable in der Zielfunktion des DP. Entsprechend ist die rechte Seite der Gleichheitsrestriktionen gleich den Koeffizienten der freien Variable im DP.
- v) Die Koeffizienten der vorzeichenbeschränkten Variable in der Zielfunktion des PP ist die rechte Seite der Ungleichungsrestriktionen im DP. Die Koeffizienten der freien Variablen im PP sind die rechte Seite der Gleichheitsrestriktionen.

vi) Die Koeffizientenmatrix wird transponiert. Es gilt

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}.$$

**Beispiele.** 1) Betrachte zunächst das LP  $\min \mathbf{c}'\mathbf{x}$  bzgl.  $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ . Hier erhalten wir für das duale Problem  $\max \mathbf{b}'\mathbf{u}$  bzgl.  $A'\mathbf{u} = \mathbf{c}, \mathbf{u} \geq 0$ .

2) Für ein LP in Standardform  $\min_{\mathbf{x} \in P} \mathbf{c}'\mathbf{x}$  mit  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$  erhalten wir für das DP

$$\max \mathbf{b}'\mathbf{u} \quad \text{bzgl.} \quad A'\mathbf{u} \leq \mathbf{c}.$$

3) Transformiert man ein LP in Standardform, so erhält man beim Übergang zum DP das gleiche Programm, wie bei direkter Anwendung von Definition 2.11 auf das LP in Originalform. Dies zeigt man leicht durch Nachrechnen. Die Standardformulierung eines allgemeinen LP's ist

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{d}\mathbf{y}^+ - \mathbf{d}'\mathbf{y}^- + 0z \\ \text{bzgl.} \quad & A\mathbf{x} + B\mathbf{y}^+ - B\mathbf{y}^- - z = \mathbf{a} \\ & c\mathbf{x} + D\mathbf{y}^+ - D\mathbf{y}^- + 0z = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-, z \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Die 'Koeffizientenmatrix' des Problems in Standardform ist also durch

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B & -B & I \\ C & D & -D & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei  $I$  die Einheitsmatrix der entsprechenden Dimension ist. Die transponierte Koeffizientenmatrix ist also

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \\ -B' & -D' \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten durch formales Anwenden der Regeln das folgende DP:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{a}'\mathbf{u} + \mathbf{b}'\mathbf{v} \\ \text{bzgl.} \quad & A'\mathbf{u} + C'\mathbf{v} \leq \mathbf{c} \\ & B'\mathbf{u} + D'\mathbf{v} \leq \mathbf{d} \\ & -B'\mathbf{u} + (-D)'\mathbf{v} \leq -\mathbf{d} \\ & -\mathbf{u} \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Diese Nebenbedingungen lassen sich zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} A'\mathbf{u} + C'\mathbf{v} & \leq \mathbf{c} \\ B'\mathbf{u} + D'\mathbf{v} & = \mathbf{d} \\ \mathbf{u} & \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

dies entspricht genau den Nebenbedingungen des originalen DP's.

**Bemerkung 2.12.** Durch formales Anwenden der Dualisierungsregeln zeigt man leicht, dass das duale Problem des DP wieder das primale Problem ist, von dem man ausgegangen ist.

### 2.3.3 Dualitätstheorie

Wir wollen nun beginnen, die Beziehungen zwischen primalem und dualem Problem zu untersuchen.

**Satz 2.13 (Schwache Dualität).** Sei  $(x, y)$  zulässig im PP und  $(u, v)$  zulässig im DP. Dann gilt  $a'u + b'v \leq c'x + d'y$ .

*Beweis.* Es folgt mit  $u \geq 0$  und  $Ax + By \geq a$ , dass

$$\begin{aligned} a'u + b'v &= u'a + v'b \\ &\leq u'(Ax + By) + v'(Cx + Dy) \\ &= x'(A'u + C'v) + y'(B'u + D'v) \\ &\leq x'c + y'd, \end{aligned}$$

da  $x \geq 0$  und  $A'u + C'v \leq c$ . □

**Folgerung 2.14.** Wenn zwei zueinander duale Programme je mindestens eine zulässige Lösung haben, so sind sie beide lösbar.

*Beweis.* Beide LP's haben zulässige Lösungen, deshalb ist nach Satz 2.13 der Wertebereich des Minimierungs (Maximierungs)-Problems durch den Wert der zulässigen Lösung des jeweils dualen Programms nach unten (oben) beschränkt. □

**Folgerung 2.15.** Ist die Zielfunktion des primalen (dualen) Problems nach unten (oben) unbeschränkt auf  $P$ , so ist der zulässige Bereich des dualen (primalen) Problems leer.

**Der Dualitätssatz.** Wir betrachten die folgenden Optimierungsprobleme.

$$\begin{array}{ll} \text{PP: } \min & c'x + d'y \\ & Ax + By \geq a \\ & Cx + Dy = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{DP: } \max & a'u + b'v \\ & A'u + C'v \leq c \\ & B'u + D'v = d \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Wir wissen bereits: Ist  $(x, y)$  zulässig in PP und  $(u, v)$  zulässig in DP, so gilt  $a'u + b'v \leq c'x + d'y$ . Wie der folgende Satz zeigt gilt aber viel mehr.

**Satz 2.16 (Dualitätssatz).** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- a) Das PP hat eine Lösung.
- b) Das DP hat eine Lösung.
- c) Das PP und das DP haben je mindestens eine Lösung und die Optimalwerte der Zielfunktion stimmen überein.

*Beweis. a) ⇒ c):* Sei  $(\hat{x}, \hat{y})$  Lösung des PP und sei  $\hat{\gamma} = \mathbf{c}'\hat{x} + \mathbf{d}'\hat{y}$  der zugehörige Optimalwert der Zielfunktion. Wir wissen bereits, dass für jedes  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , welches zulässig ist für das DP, gilt, dass  $\mathbf{a}'\mathbf{u} + \mathbf{b}'\mathbf{v} \leq \hat{\gamma}$ . Wir müssen also noch zeigen, dass das DP mindestens eine zulässige Lösung  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  hat mit  $\mathbf{a}'\mathbf{u} + \mathbf{b}'\mathbf{v} \geq \hat{\gamma}$ , d.h. dass

$$\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid A'\mathbf{u} + C'\mathbf{v} \leq \mathbf{c}, B'\mathbf{u} + D'\mathbf{v} = \mathbf{d}, \mathbf{a}'\mathbf{u} + \mathbf{b}'\mathbf{v} \geq \hat{\gamma}\} \neq \emptyset.$$

Wir wollen das Farkas-Lemma anwenden. Dazu müssen wir obiges System auf Standardform bringen. Nach Einführen von Schlupfvariablen und der Substitution  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-$  schreibt sich das System in der Form

$$\begin{aligned} A'\mathbf{u} + C'\mathbf{v}^+ - C'\mathbf{v}^- + \mathbf{w} &= \mathbf{c} \\ B'\mathbf{u} + D'\mathbf{v}^+ - D'\mathbf{v}^- &= \mathbf{d} \\ \mathbf{a}'\mathbf{u} + \mathbf{b}'\mathbf{v}^+ - \mathbf{b}'\mathbf{v}^- - t &= \hat{\gamma} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v}^+, \mathbf{v}^-, \mathbf{w}, t &\geq 0 \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix ist also gegeben durch

$$\begin{pmatrix} A' & C' & -C' & I & 0 \\ B' & D' & -D' & 0 & 0 \\ \mathbf{a}' & \mathbf{b}' & -\mathbf{b}' & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nach dem Lemma von Farkas ist obiges System nicht-leer genau dann, wenn für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau$  mit

$$\begin{pmatrix} A & B & \mathbf{a} \\ C & D & \mathbf{b} \\ C & D & -\mathbf{b} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \tau \end{pmatrix} \geq 0 \quad (2.5)$$

auch gilt  $\mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{d}'\mathbf{y} + \hat{\gamma}\tau \geq 0$ . Sei also  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)$  zulässig in (2.5).

Fall 1:  $\tau = 0$  In diesem Fall reduziert sich (2.5) auf die Restriktionen

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} + B\mathbf{y} &\geq 0 \\ C\mathbf{x} + D\mathbf{y} &= 0 \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Wenn es  $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}$  gibt, die (2.6) erfüllen und für die  $\mathbf{c}'\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{d}'\tilde{\mathbf{y}} < 0$ , so hat das PP keine Lösung im Widerspruch zur Voraussetzung, denn man kann zu einer beliebigen



Lösung  $(\hat{x}, \hat{y})$  immer  $\lambda(\tilde{x}, \tilde{y})$  mit  $\lambda > 0$  dazuaddieren; der resultierende Vektor ist immer noch primal zulässig, aber der Wert der Zielfunktion geht gegen  $-\infty$ . Also folgt  $\mathbf{c}'\tilde{x} + \mathbf{d}'\tilde{y} \geq 0$ .

Fall 2:  $\tau < 0$  ( Nach (2.5) ist  $\tau \leq 0$ .) Dann ist  $(\tilde{x}, \tilde{y}) := (\frac{\mathbf{x}}{-\tau}, \frac{\mathbf{y}}{-\tau})$  zulässig in PP und somit  $\mathbf{c}'\tilde{x} + \mathbf{d}'\tilde{y} > \hat{\gamma}$  genau dann, wenn  $\mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{d}'\mathbf{y} + \hat{\gamma}\tau \geq 0$ , so dass die Voraussetzung aus dem Farkas-Lemma wiederum erfüllt ist.

Die Richtung  $b \Rightarrow c$ ) zeigt man analog. □

**Satz 2.17 (Komplementaritätssatz).** *Seien  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  zulässig in PP und  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  zulässig in DP. Dann lösen  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  und  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  das PP bzw. das DP genau dann, wenn*

$$\mathbf{u}'(A\mathbf{x} + B\mathbf{y} - \mathbf{a}) = 0, \quad \mathbf{x}'(\mathbf{c} - A'\mathbf{u} - C'\mathbf{v}) = 0 .$$

Satz 2.17 kann wie folgt zusammengefasst werden. Ist  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  eine Lösung des PP, so sind die Ungleichungsrestriktionen entweder mit Gleichheit erfüllt oder die zugehörige Dualvariable (der mit der Restriktion verknüpfte Schattenpreis) ist Null.

*Beweis.* Es gilt, falls  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  und  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  zulässig im DP bzw. im PP,

$$\mathbf{a}'\mathbf{u} + \mathbf{b}'\mathbf{v} = \mathbf{x}'\mathbf{c} + \mathbf{y}'\mathbf{c} - \underbrace{\mathbf{x}'(\mathbf{c} - A'\mathbf{u} - C'\mathbf{v})}_{\geq 0} + \underbrace{\mathbf{u}'(A\mathbf{x} + B\mathbf{y} - \mathbf{a})}_{> 0} .$$

Wir wissen aus dem Dualitätssatz (Satz 2.16), dass  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  und  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  Lösungen genau dann sind, wenn die Gleichheit  $\mathbf{a}'\mathbf{u} + \mathbf{b}'\mathbf{v} = \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{d}'\mathbf{y}$  gilt. Da  $\mathbf{x}' \geq 0$  und  $\mathbf{u}' \geq 0$  ist die letzte Klammer  $\geq 0$ , so dass die Gleichheit  $\mathbf{a}'\mathbf{u} + \mathbf{b}'\mathbf{v} = \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{d}'\mathbf{y}$  genau dann gilt, wenn die Identitäten  $\mathbf{x}'(\mathbf{c} - A'\mathbf{u} - C'\mathbf{v}) = 0$  und  $\mathbf{u}'(A\mathbf{x} + B\mathbf{y} - \mathbf{a}) = 0$  gelten. □

## 2.4 Anwendung von Farkas-Lemma und Dualitätstheorie in einem Ein-Perioden Finanzmarktmodell

### 2.4.1 Das Modell

Wir betrachten das folgende Einperiodenmodell:

- Es gibt 2 Zeitpunkte,  $t_0$  und  $T$ . Handel der Wertpapiere findet in  $t_0$  statt, Konsum in  $t_0$  und  $T$ .
- In  $T$  sind  $S$  Zustände der Welt mit positiver Wahrscheinlichkeit möglich; Bezeichnung der möglichen Zustände durch  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_S\}$ .
- Die einzige Möglichkeit Geld von  $t_0$  nach  $T$  zu transferieren, ist der Handel von Wertschriften.

- Ein Wertpapier ist vollständig beschrieben durch seine Auszahlung in den Zuständen  $\omega_s \in \Omega$  in  $T$ . Die Auszahlung des Wertpapiers  $n$  in Zustand  $s$  wird mit  $a_n(\omega_s)$  bezeichnet.

Sei  $A = (a_1, \dots, a_N)$  die Menge der handelbaren Wertpapiere. Die Wertschriften in  $A$  können beschrieben werden durch eine  $S \times N$ -Matrix  $D$  (Auszahlungsmatrix) mit

$$D = \begin{pmatrix} a_1(\omega_1) & \cdots & a_N(\omega_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(\omega_S) & \cdots & a_N(\omega_S) \end{pmatrix}, \quad d_{sn} := a_n(\omega_s).$$

- Wir nehmen an, dass Wertpapier 1 risikofrei ist, d.h. es gelte  $a_1(\omega_1) = \dots = a_1(\omega_S) = 1$ .
- Handel der Wertpapiere erfolgt in  $t_0$ . Die Nachfrage für Wertpapier  $a_n$  ist  $\theta_n$ ;  $\theta_n > 0$  Nachfrage (long Position/Kauf),  $\theta_n < 0$  Angebot (short Position/Verkauf).

Unter einer bedingten Auszahlung (contingent claim) verstehen wir eine Zufallsvariable  $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_S)'$ , wobei wir  $W_s$  als Auszahlung im Zustand  $\omega_s$ ) interpretieren. Beispiele sind Derivate mit  $W_s = f(a_i(\omega_s))$  wie etwa Optionen.

**Definition 2.18.**

- (i) Die *Auszahlung* eines Portfolios  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)'$  ist gegeben durch die Zufallsvariable  $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_S)'$  mit  $\mathbf{W} = D \cdot \boldsymbol{\theta}$ , d.h. im Zustand  $s$  ist die Auszahlung gleich

$$W_s := \sum_{n=1}^N a_n(\omega_s) \theta_n = \sum_{n=1}^N d_{sn} \theta_n.$$

- (ii) Eine terminale Auszahlung  $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_S)' \in \mathbb{R}^S$  heißt *erreichbar* (gegeben  $D$ ), falls ein Portfolio  $\boldsymbol{\theta}$  existiert mit  $\mathbf{W} = D \cdot \boldsymbol{\theta}$ .

**Beispiel 2.19.** Es gebe 2 Wertpapiere (Obligation und Aktie)

1) Es gibt 2 Möglichkeiten für den Aktienkurs in  $T$ ,  $S_T = 180$  oder  $S_T = 120$ . Die Auszahlungsmatrix ist somit gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 180 \\ 1 & 120 \end{pmatrix},$$

wobei die erste Spalte der Auszahlung der Obligation und die zweite Spalte der Auszahlung der Aktie entsprechen. Betrachten wir nun eine Call-Option auf  $S$  mit Ausübungspreis  $K = 150$  und Fälligkeit  $T$ . Der zugehörige Auszahlungsvektor ist  $\mathbf{W}^C = (30, 0)'$ . Die Auszahlung des Calls ist erreichbar, falls das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{W}^C = D \cdot \boldsymbol{\theta}$  eine Lösung hat, d.h. falls es  $\theta_1, \theta_2$  gibt, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \theta_1 + 180\theta_2 &= 30 \\ \theta_1 + 120\theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Dies ist der Fall für  $\theta_1 = -60$ ,  $\theta_2 = 1/2$ .

2) Angenommen es gibt für den Zustand von  $S_T$  (der Welt, soweit sie für uns relevant ist) drei Möglichkeiten. Konkret nehmen wir an, dass der Aktienkurs zusätzlich noch den Wert  $S_T = 150$  annehmen kann. Die Auszahlungsmatrix hat in diesem Fall folgende Form:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 180 \\ 1 & 150 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}.$$

Unser Call hat somit in  $T$  die Auszahlung  $\mathbf{W}^C = (30, 0, 0)'$ . Man sieht sofort, dass das Gleichungssystem  $\mathbf{W}^C = D \cdot \boldsymbol{\theta}$  in diesem Fall keine Lösung hat. Wir erhalten das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\theta_1 + 180\theta_2 = 30 \quad (2.7)$$

$$\theta_1 + 150\theta_2 = 0 \quad (2.8)$$

$$\theta_1 + 120\theta_2 = 0. \quad (2.9)$$

Aus Beispiel 1) wissen wir, dass (2.7) und (2.9) auf  $\theta_1 = -60$ ,  $\theta_2 = 1/2$  führen. Setzen wir diese Werte in (2.8) ein, so erhalten wir

$$-60 + 1/2 \cdot 150 = -60 + 75 \neq 0.$$

Der Call ist also nicht erreichbar.

**Definition 2.20.** Ein Markt, der durch die Auszahlungsmatrix  $D \in \mathbb{R}^{S \times N}$  ( $S$  Zeilen,  $N$  Spalten) beschrieben wird, heißt *vollständig*, falls zu jeder Auszahlung  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^S$  ein Portfolio  $\boldsymbol{\theta}$  existiert mit  $\mathbf{W} = D \cdot \boldsymbol{\theta}$ .

**Lemma 2.21.** *Ein Markt ist genau dann vollständig, wenn der Rang der Auszahlungsmatrix gleich  $S$  ist.*

## 2.4.2 Arbitragefreiheit und Zustandspreise

Der Preis für die  $N$  Wertschriften sei gegeben durch  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)' \in \mathbb{R}^N$ ; dabei ist  $q_i$  der Preis der Wertschrift  $a_i$  im Zeitpunkt  $t_0$ . Speziell definieren wir den Zinssatz  $r$  durch  $q_1 = 1/(1+r)$ . Wir wollen zunächst die Frage untersuchen, welche Preissysteme bei gegebener Auszahlungsmatrix  $D$  keine Arbitrage zulassen, da nur solche Preise mit einem Gleichgewicht auf dem Kapitalmarkt vereinbar sind.

**Definition 2.22 (Arbitrage).** Gegeben der Markt  $(D, \mathbf{q})$ . Eine *Arbitragemöglichkeit* ist ein Portfolio  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)'$  mit

(i)  $\sum_{n=1}^N q_n \theta_n \leq 0$  (d.h. in  $t_0$  ist der Preis  $\leq 0$ ),

(ii)  $\sum_{n=1}^N a_n(\omega_s) \theta_n \geq 0 \quad \forall s \in \{1, \dots, S\}$  (Auszahlung  $\geq 0$ ) und

(iii) es gilt  $\sum_{n=1}^N q_n \theta_n = 0$  und  $\sum_{n=1}^N a_n(\omega_s) \theta_n > 0$  für mindestens einen Zustand.

Unser Ziel ist die Charakterisierung von arbitragefreien Preissystemen. Dazu brauchen wir folgende Definition.

**Definition 2.23.** Ein *Vektor von Zustandspreisen* für den durch eine Auszahlungsmatrix  $D$  und ein Preissystem  $\mathbf{q}$  gegebenen Markt ist ein Vektor  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^S$  (mit  $\psi_s > 0, \forall s \in \{1, \dots, S\}$ ), der die Gleichung  $\mathbf{q} = D' \boldsymbol{\psi}$ , erfüllt, wobei  $D'$  die transponierte Matrix von  $D$  bezeichnet.

**Interpretation der Zustandspreise.** Für einen festen Zustand  $\omega_s, \in \{1, \dots, S\}$  kann  $\psi_s$  als Preis einer fiktiven Wertschrift betrachtet werden, die in  $T$  1 Geldeinheit auszahlt, falls Zustand  $\omega_s$  eintritt und 0 Geldeinheiten sonst. Die Bedingung  $\mathbf{q} = D' \boldsymbol{\psi}$  bedeutet ausgeschrieben

$$q_n = \sum_{s=1}^S d_{sn} \psi_s = \sum_{s=1}^S a_n(\omega_s) \psi_s, \quad n = 1, \dots, N.$$

Falls  $\psi_s$  der Preis des Wertpapiers mit Auszahlung  $\mathbf{W}^s = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$  ist, so muss gelten  $q_n = \sum_{s=1}^S a_n(\omega_s) \psi_s$ , weil sich die gehandelte Wertschrift  $n$  als Portfolio der fiktiven Wertpapiere darstellen lässt. Die Existenz von Zustandspreisen bedeutet also, dass es mindestens einen Preisvektor für die fiktiven Wertpapiere gibt, der mit dem Preis  $\mathbf{q}$  der gehandelten Wertpapiere verträglich ist.

**Bemerkung 2.24.** Diese fiktiven Wertpapiere sind auch unter dem Namen *Arrow-Debreu Securities* bekannt.

**Lemma 2.25.** Sei  $\boldsymbol{\psi}$  ein Vektor von Zustandspreisen. Dann gilt für jede erreichbare Auszahlung  $\mathbf{W} = D\boldsymbol{\theta}$

$$\sum_{n=1}^N q_n \theta_n = \sum_{s=1}^S \psi_s W_s \quad (2.10)$$

*Beweis.* Die Bedingung  $\mathbf{q} = D' \boldsymbol{\psi}$  bedeutet ausgeschrieben  $q_n = \sum_{j=1}^S d_{jn} \psi_j, n = 1, \dots, N$ . Damit erhalten wir

$$\sum_{n=1}^N q_n \theta_n = \sum_{n=1}^N \theta_n \sum_{j=1}^S d_{jn} \psi_j = \sum_{j=1}^S \psi_j \sum_{n=1}^N d_{jn} \theta_n$$

Da  $W_j = \sum_{n=1}^N d_{jn} \theta_n$  folgt (2.10). □

**Satz 2.26 (1. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung).** Ein durch Auszahlungsmatrix  $D$  und Preis  $\mathbf{q}$  gegebener Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn mindestens ein Vektor von Zustandspreisen existiert.

*Beweis.* Der Satz ist eine Version des Farkas Lemmas. □

**Beispiel 2.27.** Wertpapiermarkt mit 3 Wertpapieren und 2 Zuständen. Es gilt:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 12 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

und  $\mathbf{q}' = (7, 3, 5)$ . Wir wollen zeigen, dass der durch  $(D, \mathbf{q})$  gegebene Wertpapiermarkt arbitragefrei ist. Wir müssen zeigen, dass es einen Vektor von Zustandspreisen  $\psi$  gibt mit  $\psi_1, \psi_2 > 0$ . Dies führt auf folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 6 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

bzw. bereits etwas umgeformt:

$$4\psi_1 + 12\psi_2 = 7 \tag{2.11}$$

$$-15\psi_2 = -15/2 \tag{2.12}$$

$$3\psi_2 = 3/2. \tag{2.13}$$

Gleichung (2.13) und (2.12) liefern uns das Resultat  $\psi_2 = 1/2$ . Aus (2.11) folgt  $\psi_1 = 1/4$ . Der Zustandspreisvektor ist somit gleich  $(1/2, 1/4)'$ .

### 2.4.3 Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten

Wir wollen die Zustandspreise als Wahrscheinlichkeiten interpretieren, weil sich diese Interpretation besser auf Mehrperiodenmodelle verallgemeinern lässt.

**Definition 2.28.** Gegeben ein Markt mit Auszahlungsmatrix  $D$  und Preissystem  $\mathbf{q}$ .

- (i) Ein Vektor  $\mathbf{p}$  mit  $p_s > 0 \forall s, \sum_{s=1}^S p_s = 1$  heißt *risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß* für den Markt  $(D, \mathbf{q})$ , falls für jede erreichbare Auszahlung  $\mathbf{W} = D\boldsymbol{\theta}$  gilt

$$\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^S p_i W_i =: \frac{1}{1+r} E^P(W). \tag{2.14}$$

**Bemerkung 2.29.**

1) Das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmass wird oft auch als *Martingalmass* bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  sind durch  $D$  und  $\mathbf{q}$  festgelegt und sind typischerweise verschieden von den realen Eintritts wahrscheinlichkeiten der Zustände  $\omega_s$ . Der Name *risikoneutrale Wahrscheinlichkeit* kommt daher, dass diese Wahrscheinlichkeiten gerade den Erwartungen eines risikoneutralen Investors entsprechen, die mit dem Preissystem  $\mathbf{q}$  in Einklang stehen.

2) Die Regel (2.14) wird oft auch als *risk-neutral pricing rule* bezeichnet.

In der folgenden Proposition untersuchen wir die Beziehung von risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten und Zustandspreisen

**Proposition 2.30.** Gegeben ein Markt  $(D, \mathbf{q})$  sowie der risikofreie Zinssatz  $r$ .

1. Sei  $\psi$  ein Vektor von Zustandspreisen zu unserem Markt. Dann ist durch  $\mathbf{p}^\psi$  mit  $p_s^\psi = \frac{\psi_s}{\sum_{s=1}^S \psi_s}$  ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß festgelegt.
2. Sei  $\psi$  ein Martingalmaß. Dann können wir einen Vektor von Zustandspreisen  $\mathbf{p}$  definieren durch  $\psi_s = \frac{p_s}{(1+r)}$ .

**Bemerkung 2.31.** Zustandspreise und risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten entsprechen sich somit eineindeutig.

*Beweis.* **1)**  $\mathbf{p}^\psi$  definiert offensichtlich einen Vektor von Wahrscheinlichkeiten. Wir überprüfen die risk-neutral pricing rule. Sei  $\mathbf{W} = D \cdot \mathbf{q}$  eine erreichbare Auszahlung. Dann gilt für deren Preis  $\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\theta}$ :

$$\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\theta} = \sum_{s=1}^S \psi_s W_s = \sum_{s=1}^S \psi_s \cdot \sum_{s=1}^S p_s^\psi \cdot W_s.$$

Nun ist  $\sum_{s=1}^S \psi_s$  der Preis des risikoneutralen Portfolios. Also gilt:  $\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\theta} = (1+r)^{-1} \sum_{s=1}^S p_s^\psi W_s$ .

**2)** Betrachte das Portfolio  $\boldsymbol{\theta} = (0, \dots, \underbrace{1}_{n\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)$ . Dann ist  $\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\theta} = q_n$ ,  $D \cdot \mathbf{q} = (a_n(\omega_1), \dots, a_n(\omega_S))'$ . Weil  $\mathbf{p}$  ein risikofreies Wahrscheinlichkeitsmass ist, gilt

$$q_n = (1+r)^{-1} \sum_{s=1}^S p_s a_n(\omega_s) = \sum_{s=1}^S \psi_s d_{sn}.$$

□

#### 2.4.4 Die Superhedging-Dualität

Wir betrachten im folgenden stets einen arbitragefreien Markt  $(D, \mathbf{q})$ .

**Definition 2.32.** Gegeben sei eine beliebige Auszahlung  $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_S)'$ . Ein Superreplikationsportfolio für  $\mathbf{W}$  ist ein Portfolio  $\boldsymbol{\theta}$  mit  $D\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{W}$ ; der Preis des Superreplikationsportfolios ist durch  $\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\theta}$  gegeben.

Aus Verkäufersicht erlaubt es ein Superreplikationsportfolio, das mit dem Verkauf eines Derivats verbundene Risiko vollständig zu eliminieren.

**Beispiel 2.33.**

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 180 \\ 1 & 150 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = (1, 150)'$$

$W = (30, 0, 0)'$  entspricht einer Call-Option auf Aktie mit  $K = 150$ . Eine mögliche Superhedging-Strategie ist durch  $\boldsymbol{\theta} = (-120, 1)$  mit Preis  $-120 + 150 = 30$  gegeben. Es gilt

$$D\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Ziel:** Finde – und charakterisiere – kostenminimierende Superhedging-Strategie. Dies führt zu folgendem Problem

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{q}'\boldsymbol{\theta} \quad \text{bezügl.} \quad D\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{W}. \quad (\text{PP})$$

Wir werden sehen, dass in unserem Kontext das duale Problem eine besonders eingängige Interpretation liefert. Das duale Problem hat die folgende Form.

$$\max_{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\psi}'\mathbf{W} \quad \text{bezügl.} \quad D'\boldsymbol{\psi} = \mathbf{q}, \quad \boldsymbol{\psi} \geq 0 \quad (\text{DP})$$

**Lemma 2.34.** *In einem arbitragefreien Markt haben (DP) und (PP) eine Lösung, und die Werte der Zielfunktion stimmen überein.*

*Beweis.* Der zulässige Bereich des (DP) ist nicht leer, da das Modell arbitragefrei ist. Der zulässige Bereich des (PP) ist nicht leer, da  $\mathbf{D}_1 = (1, \dots, 1)'$  und somit  $\lambda\mathbf{D}_1 \geq \mathbf{W}$  für  $\lambda$  genügend groß. Also haben (PP) und (DP) eine Lösung, und die Zielfunktionswerte stimmen nach dem Dualitätssatz überein.  $\square$

Für die ökonomische Interpretation von Lemma 2.34 brauchen wir noch

**Lemma 2.35.** *Sei  $(D, \mathbf{q})$  ein arbitragefreier Markt. Dann gilt*

$$\max\{\boldsymbol{\psi}'\mathbf{W}, \boldsymbol{\psi} \geq 0, \mathbf{q} = D'\boldsymbol{\psi}\} = \sup\{\boldsymbol{\psi}'\mathbf{W}, \boldsymbol{\psi} > 0, \mathbf{q} = D'\boldsymbol{\psi}\}.$$

*Beweis.* Sei  $\boldsymbol{\psi}^*$  eine Lösung des (DP),  $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$  ein strikt positiver Vektor von Zustandspreisen. Definiere  $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon := (1 - \varepsilon)\boldsymbol{\psi}^* + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ . Dann ist  $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon > 0$ , und es gilt  $D'\tilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon = (1 - \varepsilon)D'\boldsymbol{\psi}^* + \varepsilon D'\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{q}$ . Außerdem gilt  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon' \mathbf{W} = (\boldsymbol{\psi}^*)' \mathbf{W}$ .  $\square$

Zusammenfassend haben wir also

**Satz 2.36.** Sei  $(D, \mathbf{q})$  ein arbitragefreier Markt. Dann gibt es zu jeder Auszahlung  $\mathbf{W}$  eine kostenminimierende Superreplikationsstrategie  $\boldsymbol{\theta}$ . Die Superreplikationskosten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \min\{\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\theta}, D\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{W}\} &= \sup\{\boldsymbol{\psi}'\mathbf{W}, \boldsymbol{\psi} \text{ Vektor von Zustandspreisen}\} \\ &= \sup\left\{\frac{1}{1+r}E^Q(\mathbf{W}), Q \text{ äquivalentes Martingalmaß}\right\}. \end{aligned}$$

**Beispiel 2.37.**

$$D \begin{pmatrix} 1 & 180 \\ 1 & 150 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = (30, 0, 0)', \quad \mathbf{q} = (1, 150)'.$$

(i) Bestimme alle Zustandspreise: Die Bedingung  $\mathbf{q} = D'\boldsymbol{\psi}$  führt auf das LGS

$$\begin{aligned} 180\psi_1 + 150\psi_2 + 120\psi_3 &= 150 \\ \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 &= 1, \quad \psi_i > 0. \end{aligned}$$

Das LGS führt auf Lösungen der Form  $\psi_1 = \psi_3, \psi_2 = 1 - 2\psi_3$ , die Bedingung  $\psi_i > 0$  also auf Zustandspreise der Form  $\boldsymbol{\psi} = \left\{(\alpha, 1 - 2\alpha, \alpha), \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right\}$ .

(ii) Bestimme Lösung des (DP):

$$\begin{aligned} \sup\{\boldsymbol{\psi}'\mathbf{W}, \boldsymbol{\psi} > 0, \mathbf{q} = D'\boldsymbol{\psi}\} &= \sup\left\{\alpha 30 + (1 - 2\alpha)0 + 0, \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}30 = 15. \end{aligned}$$

Die zugehörige degenerierte Vektor von Zustandspreisen ist  $\boldsymbol{\psi}^* = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)'$ .

(iii) Man rechnet leicht nach, dass die Lösung des (PP) durch  $\theta_1 = -60, \theta_2 = \frac{1}{2}$  gegeben ist. Zugehörige Duplikationskosten:  $-60 + \frac{1}{2}150 = 15$ .

## 2.5 Die Struktur von Polyedern

**Definition 2.38.** Ein *Polyeder* ist eine Menge  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ , die in der Form  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$ ,  $A$  eine  $m \times n$  Matrix,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , beschrieben werden kann.

**Polyeder in Standardform.** Der zulässige Bereich eines LP in Standardform ist  $P := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ ,  $A$  eine  $m \times n$  Matrix. Wie in Abschnitt 2.1 gezeigt, lässt sich jedes LP durch Einführen von zusätzlichen Variablen auf diese Form bringen. Die Menge  $P$  ist ein Polyeder im Sinn von Definition 2.38, denn  $P$  lässt sich durch das folgende System linearer Ungleichungen

$$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, (-A)\mathbf{x} \geq -\mathbf{b}, I\mathbf{x} \geq 0, \quad (2.15)$$



$I$  die Einheitsmatrix im  $\mathbb{R}^n$ , beschreiben. Deshalb nennt man  $P$  oft auch Darstellung eines Polyeders in Standardform.

**Bemerkung 2.39.** Beachte, dass bei einem allgemeinen Polyeder wie in Definition 2.38  $m \geq n$  gilt; für Polyeder in Standardform hingegen  $m \leq n$ . Dies ist konsistent: beschreibt man einen Polyeder in Standardform (beschrieben durch eine  $m \times n$ -Matrix  $A$ ) durch ein System linearer Ungleichungen wie in (2.15), so erhält man  $2m + n > n$  Restriktionen.

## 2.5.1 Extremalpunkte, Ecken und zulässige Basislösungen

Ein Polyeder ist offensichtlich konvex. Wir wissen aus vielen Beispielen auch, dass den ‘Eckpunkten’ eines Polyeders bei der linearen Optimierung eine besondere Rolle zukommt. Hier geben wir deshalb verschiedene (geometrische und algebraische) Beschreibungen von Eckpunkten.

**Definition 2.40.** Sei  $P$  ein Polyeder,  $\mathbf{x} \in P$  heißt *Extremalpunkt*, falls für jede Darstellung der Form  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z}$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$ , gilt, dass  $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$ .

**Definition 2.41.** Sei  $P$  ein Polyeder. Dann heißt  $\mathbf{x} \in P$  *Ecke* von  $P$ , falls es ein  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  gibt mit  $\mathbf{c}'\mathbf{x} < \mathbf{c}'\mathbf{y}$  für alle  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y} \in P$ .

Als nächsten Schritt suchen wir eine algebraische Beschreibung von ‘Eckpunkten’, welche direkt die Definition von  $P$  mittels eines Systems linearer Ungleichungen benutzt. Betrachte einen Polyeder  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ , der durch die Gleichheits- und Ungleichheitsrestriktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_i \mathbf{x} &\geq b_i, & i \in M_1, \\ \mathbf{a}'_i \mathbf{x} &= b_i, & i \in M_2, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$M_1, M_2$  disjunkte endliche Indexmengen,  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_i \in \mathbb{R}$  gegeben ist.

**Definition 2.42.** Falls ein Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  die Gleichung  $\mathbf{a}'_i \mathbf{x} = b_i$  für ein  $i \in M_1$  oder  $i \in M_2$  löst, so nennen wir die Nebenbedingung  $i$  *bindend* oder *aktiv*.

**Beispiel 2.43.** Betrachte das Polyeder  $P = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_i \geq 0\}$ . An den ‘Ecken’  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  und  $(0, 0, 1)$  sind drei Nebenbedingungen aktiv, im Punkt  $E = (1/2, 1/2, 0)$  sind zwei Nebenbedingungen aktiv.

Der nächste Satz ist eine elementare Anwendung von Ergebnissen der linearen Algebra.

**Satz 2.44.** Betrachte  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und definiere  $I = \{i \mid \mathbf{a}'_i \mathbf{x} = b_i\}$  als Menge aller Indizes der aktiven/bindenden Nebenbedingungen. Dann sind äquivalent:

- a) Es gibt  $n$  linear unabhängige Vektoren in der Menge  $\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\}$ .

b)  $\text{span}\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\} = \mathbb{R}^n$

c) Das Gleichungssystem  $\mathbf{a}'_i \mathbf{x} = b_i$ ,  $i \in I$  hat eine eindeutige Lösung.

Auf den Beweis verzichten wir. Jetzt können wir eine algebraische Definition von Eckpunkten geben.

**Definition 2.45.** Betrachte ein Polyeder  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ , das durch das Ungleichungssystem (2.16) definiert ist und sei  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  (nicht notwendig aus  $P$ ).

- a)  $\mathbf{x}^*$  heißt *Basislösung*, falls alle Gleichheitsbedingungen  $\mathbf{a}'_i \mathbf{x}^* = b_i$ ,  $i \in M_2$  erfüllt (aktiv) sind und falls die Menge aller aktiven Nebenbedingungen genau  $n$  linear unabhängige Vektoren enthält. (“ $n$  linear unabhängige Nebenbedingungen”)
- b) Gilt zusätzlich  $\mathbf{x}^* \in P$  (d.h. sind alle Ungleichungsbedingungen erfüllt), so heißt  $\mathbf{x}^*$  *zulässige Basislösung*.

**Satz 2.46.** Sei  $P$  ein Polyeder und  $\mathbf{x}^* \in P$ . Dann sind äquivalent:

- a)  $\mathbf{x}^*$  ist eine Ecke.
- b)  $\mathbf{x}^*$  ist ein Extrempunkt.
- c)  $\mathbf{x}^*$  ist eine zulässige Basislösung.

*Beweis.* Wir nehmen o.B.d.A. an, dass  $P$  durch das Ungleichungssystem (2.16) definiert ist.

*Ecke  $\Rightarrow$  Extrempunkt.* Sei  $\mathbf{x}^* \in P$  eine Ecke. Dann existiert ein  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{c}'\mathbf{x}^* < \mathbf{c}'\mathbf{y}$  für alle  $\mathbf{y} \in P$ . Falls  $\mathbf{x}^*$  kein Extrempunkt ist, so gibt es  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$  mit  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  und  $\lambda \in (0, 1)$ , so dass  $\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ . Es folgt

$$\mathbf{c}'\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{c}'\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{c}'\mathbf{y} < \lambda\mathbf{c}'\mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{c}'\mathbf{x}^* = \mathbf{c}'\mathbf{x}^* ,$$

Dies ist ein Widerspruch und damit ist  $\mathbf{x}^*$  ein Extrempunkt.

*Extrempunkt  $\Rightarrow$  zulässige Basislösung.* Wir nehmen an, dass  $\mathbf{x}^*$  keine zulässige Basislösung ist. Definiere  $I = \{i \mid \mathbf{a}'_i \mathbf{x}^* = b_i\}$ . Da  $\mathbf{x}^*$  keine Basislösung, liegen die Vektoren  $\mathbf{a}_i$ ,  $i \in I$  in einem echten Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  und es gibt ein  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ , so dass  $\mathbf{a}'_i \mathbf{d} = 0$  für alle  $i \in I$ . Betrachte für  $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{d}, \quad \mathbf{y} := \mathbf{x}^* - \varepsilon\mathbf{d}$$

und beachte, dass  $\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}$ . Nun gilt  $\mathbf{a}'_i \mathbf{x} = \mathbf{a}'_i \mathbf{x}^* = b_i$ , und analog für  $\mathbf{y}$ . Ausserdem sind für  $\varepsilon$  genügend klein auch die übrigen Ungleichungsbedingungen erfüllt. Es folgt, dass  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$  für  $\varepsilon$  hinreichend klein, so dass  $\mathbf{x}^*$  kein Extrempunkt ist.

*zulässige Basislösung  $\Rightarrow$  Ecke.* Sei  $\mathbf{x}^*$  eine zulässige Basislösung,  $I = \{i \mid \mathbf{a}'_i \mathbf{x} = b_i\}$ . Definiere  $\mathbf{c} = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i$ . Es gilt  $\mathbf{c}'\mathbf{x}^* = \sum_{i \in I} \mathbf{a}'_i \mathbf{x}^* = \sum_{i \in I} b_i$ . Für beliebiges  $\mathbf{x} \in P$  gilt

$\mathbf{c}'\mathbf{x} = \sum_{i \in I} \mathbf{a}'_i \mathbf{x} \geq \sum_{i \in I} b_i$ . Daraus folgt, dass  $\mathbf{x}^*$  das LP  $\min_{\mathbf{x} \in P} \mathbf{c}'\mathbf{x}$  löst. Ausserdem gilt für  $\mathbf{x} \in P$ , dass  $\mathbf{c}'\mathbf{x} = \sum_{i \in I} b_i$  genau dann, wenn alle Nebenbedingungen zu den Indizes aus  $I$  bindend sind. Da  $\mathbf{x}^*$  zulässige Basislösung enthält die Menge der Vektoren  $\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\}$   $n$  linear unabhängige Vektoren und das LGS  $\mathbf{a}'_i \mathbf{x} = b_i, i \in I$  ist eindeutig lösbar. Es folgt, dass

$$\mathbf{c}'\mathbf{x} = \sum_{i \in I} b_i, \mathbf{x} \in P \iff \mathbf{x} = \mathbf{x}^* .$$

□

## 2.5.2 Polyeder in Standardform

Sei  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$  ein Polyeder in Standardform, wobei  $A$  eine  $m \times n$  Matrix ist,  $m \leq n$ . Wir nehmen an, dass die Zeilen von  $A$  linear unabhängig sind, d.h.  $\text{rg}A = m$ . Dies ist o.B.d.A. möglich, wie in Übungsaufgabe 2, Serie 7 gezeigt.

**Form der Basislösungen** Gemäß Definition 2.45 müssen alle Gleichheitsrestriktionen bindend sein, außerdem müssen mindestens  $n$  Nebenbedingungen bindend sein, so dass  $n - m$  Koordinaten von  $\mathbf{x}$  gleich Null sein müssen. Damit die zu den aktiven Restriktionen gehörigen Vektoren linear unabhängig sind, muss aber noch mehr gelten, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 2.47.** Sei  $P$  ein Polyeder in Standardform, so dass für die Koeffizientenmatrix  $\text{rg}A = m$  gilt. Betrachte  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Dann sind äquivalent:

- i)  $\mathbf{x}$  ist Basislösung.
- ii) Es gibt Indizes  $B(1), \dots, B(m)$  mit
  - a) Die Spalten  $\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)}$  sind linear unabhängig.
  - b) Falls  $i \neq B(1), \dots, B(m)$ , so ist  $x_i = 0$ .

**Bemerkung 2.48.** Für eine  $m \times n$  Matrix  $A$  werden im Folgendem stets die Zeilenvektoren mit  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  und die Spaltenvektoren mit  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$  bezeichnet.

*Beweis.* Betrachte  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und nehme an, dass es Indizes  $B(1), \dots, B(m)$  gibt, so dass a) und b) aus dem Satz erfüllt sind. Da  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  und  $x_i = 0$  für  $i \neq B(1), \dots, B(m)$  gilt

$$\sum_{i=1}^m x_{B(i)} \mathbf{A}_{B(i)} = \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{A}_i = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} . \quad (2.17)$$

Da  $\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)}$  linear unabhängig, sind  $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$  durch (2.17) eindeutig bestimmt. Die anderen Komponenten von  $\mathbf{x}$  sind durch die aktiven Nebenbedingungen  $x_i = 0, i \neq B(1), \dots, B(m)$  festgelegt. Insgesamt legen die aktiven Nebenbedingungen  $\mathbf{x}$  also eindeutig fest und es folgt, dass  $\mathbf{x}$  Basislösung ist.

Für die Umkehrung nehmen wir an, dass  $\mathbf{x}$  Basislösung ist. Wir müssen also zeigen, dass a) und b) aus dem Satz erfüllt sind. Seien  $x_{B(1)}, \dots, x_{B(l)}, l \leq m$  die nicht-verschwindenden Komponenten von  $\mathbf{x}$ . Da  $\mathbf{x}$  eine Basislösung ist, legen die aktiven Nebenbedingungen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad x_i = 0, \quad i \neq B(1), \dots, B(l) \quad (2.18)$$

$\mathbf{x}$  eindeutig fest. (2.18) ist äquivalent dazu, dass das LGS  $\sum_{i=1}^l \mathbf{A}_{B(i)} x_{B(i)} = \mathbf{b}$  eine eindeutige Lösung hat. Es folgt, dass die Vektoren  $\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(l)}$  linear unabhängig sind. Da  $\text{rg}A = m$  und  $l \leq m$ , können  $\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(l)}$  durch weitere Spalten  $\mathbf{A}_{B(l+1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)}$  zu einer Basis des  $\mathbb{R}^m$  ergänzt werden, so dass für  $B(1), \dots, B(l), B(l+1), \dots, B(m)$  a) und b) erfüllt sind.  $\square$

**Basislösungen für Polyeder in Standardform** Wir haben folgenden “Algorithmus” zur Konstruktion von Basislösungen.

- 1.) Wähle  $m$  linear unabhängige Spalten  $\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)}$ .
- 2.) Löse das LGS  $\sum_{i=1}^m x_{B(i)} \mathbf{A}_{B(i)} = \mathbf{b}$  zur Bestimmung von  $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$ .
- 3.) Setze  $x_i = 0, i \neq B(1), \dots, B(m)$ .

Falls für eine derart konstruierte Basislösung  $\mathbf{x}$  auch noch  $x_{B(i)} \geq 0$  für alle  $1 \leq i \leq m$  gilt, so ist  $\mathbf{x}$  eine zulässige Basislösung. Jede Basislösung kann gemäß dem obigen Algorithmus bestimmt werden.

#### Terminologie

- Sei  $\mathbf{x}$  eine Basislösung, dann sind  $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$  die Basisvariablen. Die anderen Variablen heißen Nicht-Basisvariablen.
- $\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)}$  sind die Basisspalten. Sie bilden nach Definition eine Basis des  $\mathbb{R}^m$ .
- Zwei Basen  $B, \bar{B}$  heißen verschieden, falls die Mengen

$$\{B(1), \dots, B(m)\} \neq \{\bar{B}(1), \dots, \bar{B}(m)\}.$$

- Die Matrix  $B = (\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)})$  heißt Basismatrix. Analog ist der Vektor  $\mathbf{x}_B = (x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)})'$  definiert. Es gilt  $B\mathbf{x}_B = A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  und somit  $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ , da die Matrix  $B$  nach Voraussetzung invertierbar ist. Insbesondere legt eine Basis die zugehörige Basislösung also eindeutig fest.

**Bemerkung 2.49.** Verschiedene Basislösungen führen zu verschiedenen Basen, da eine Basis die Basislösung eindeutig festlegt. Die Umkehrung ist aber falsch. (Beispielsweise führt im Spezialfall  $\mathbf{b} = 0$  jede Basis auf die Basislösung  $\mathbf{x} = 0$ .)

### 2.5.3 Degeneriertheit

**Definition 2.50.** Eine Basislösung  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  heißt *degeneriert*, falls mehr als  $n$  Nebenbedingungen im Punkt  $\mathbf{x}$  bindend sind.

*Geometrische Interpretation.* In einer degenerierten Basislösung schneiden sich mehr als  $n$  der durch die Restriktionen definierten Hyperebenen.

Als Spezialfall der obigen Definition erhalten wir

**Definition 2.51.** Sei  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$  ein Polyeder in Standardform, und sei  $\mathbf{x}$  eine Basislösung. Sei  $m$  die Anzahl der Zeilen von  $A$ .  $\mathbf{x}$  ist eine *degenerierte Basislösung*, falls mehr als  $n - m$  Komponenten von  $\mathbf{x}$  gleich Null sind.

### 2.5.4 Benachbarte Basislösungen

**Definition 2.52.** Sei  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$  ein Polyeder. Zwei verschiedene Basislösungen  $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}$  heißen *benachbart*, falls es  $(n - 1)$  linear unabhängige Nebenbedingungen gibt, die in  $\mathbf{x}$  und  $\tilde{\mathbf{x}}$  bindend sind.

**Definition 2.53.** Sei  $P$  ein Polyeder in Standardform. Dann heißen zwei Basen  $\{B(1), \dots, B(m)\}$  und  $\{\tilde{B}(1), \dots, \tilde{B}(m)\}$  benachbart, wenn sie sich in genau einem Element unterscheiden.

**Bemerkung 2.54.** Man zeigt leicht, dass zu zwei benachbarten Basislösungen von  $P$  benachbarte Basen gehören. Falls umgekehrt zwei Basen  $B$  und  $\tilde{B}$  benachbart sind und die zugehörigen Basislösungen  $\mathbf{x}$  und  $\tilde{\mathbf{x}}$  verschieden sind, so sind auch  $\mathbf{x}$  und  $\tilde{\mathbf{x}}$  benachbart.

### 2.5.5 Existenz von Extrempunkten

Im Folgendem suchen wir notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Extrempunkten. Zusätzliche Bedingungen sind nötig, da beispielsweise ein Halbraum  $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}'\mathbf{x} \geq b\}$  keine Extrempunkte enthält. Die folgende Bedingung wird die Existenz von Optimalpunkten sicherstellen.

**Definition 2.55.** Ein Polyeder  $P \subset \mathbb{R}^n$  enthält eine Gerade, falls es  $\mathbf{x} \in P$  und  $\mathbf{d} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  gibt mit  $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \in P$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Satz 2.56.** Sei  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}'_i\mathbf{x} \geq b_i, i = 1, \dots, m\}$  ein nicht-leerer Polyeder. Dann sind äquivalent:

- a)  $P$  hat mindestens einen Extrempunkt.
- b)  $P$  enthält keine Gerade.
- c) Die Familie von Vektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  enthält  $n$  linear unabhängige Vektoren.

*Beweis.* b) ⇒ a). Sei  $\mathbf{x} \in P$  und sei  $I = \{i \mid \mathbf{a}'_i \mathbf{x} = b_i\}$  die Menge der bindenden Nebenbedingungen. Falls die Menge  $\{\mathbf{a}_i, i \in I\}$   $n$  linear unabhängige Vektoren enthält, so ist  $\mathbf{x}$  zulässige Basislösung und somit Extrempunkt und a) folgt. Andernfalls ist  $D = \text{span}\{\mathbf{a}_i, i \in I\}$  ein echter Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  und es gibt  $\mathbf{d} \neq 0 \in D^\perp$ . Betrachte die Gerade  $L = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Für  $\mathbf{y} \in L$  gilt mit  $\mathbf{d} \in D^\perp$

$$\mathbf{a}'_i \mathbf{y} = \mathbf{a}'_i \mathbf{x} + \lambda \mathbf{a}'_i \mathbf{d} = \mathbf{a}'_i \mathbf{x} = b_i, \quad i \in I.$$

Für  $|\lambda|$  klein folgt für  $j \in \{1, \dots, m\} \setminus I$  wegen  $\mathbf{a}'_j \mathbf{x} > b_j$ , dass auch  $\mathbf{a}'_j \mathbf{y} > b_j$ . Variieren wir nun  $\lambda$ , so gibt es ein betragsmäßig kleinstes  $\lambda^*$  mit  $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d} \notin P$  für ein  $\lambda$  mit  $|\lambda| > |\lambda^*|$  ( $|\lambda^*| < \infty$ , da  $P$  keine Gerade enthält). Es folgt, dass in  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x} + \lambda^* \mathbf{d}$  mindestens eine weitere Nebenbedingung  $\mathbf{a}'_j \mathbf{x}^{(1)} = b_j$ ,  $j \in \{1, \dots, m\} \setminus I$  aktiv ist. Da  $\mathbf{a}'_j \mathbf{x} > b_j$ ,  $\mathbf{a}'_j \mathbf{x}^{(1)} = b_j$  folgt außerdem  $\mathbf{a}'_j \mathbf{d} \neq 0$ , so dass  $\mathbf{a}_j \notin \text{span}\{\mathbf{a}_i, i \in I\}$ . Insgesamt haben wir zu  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$  also  $\mathbf{x}^{(1)} \in P$  konstruiert, so dass in  $\mathbf{x}^{(1)}$  mindestens eine zusätzliche, linear unabhängige Nebenbedingung aktiv ist. Dieses Verfahren läßt sich wiederholen, bis wir eine zulässige Basislösung gefunden haben.

a) ⇒ c). Ein Extrempunkt von  $P$  ist, wie in Satz 2.46 gezeigt, auch zulässige Basislösung und die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition der zulässigen Basislösungen.

c) ⇒ b). Nehme o.B.d.A. an, dass  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  linear unabhängig sind. Falls  $P$  eine Gerade  $L = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{d} \neq 0\}$  enthält, so muss gelten  $\mathbf{a}'_i(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}_i) > b_i$  für  $1 \leq i \leq m$  und alle  $\lambda$ . Mit  $|\lambda| \rightarrow \infty$  erhalten wir  $\mathbf{a}'_i \mathbf{d} = 0$  für alle  $1 \leq i \leq m$ . Da  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  linear unabhängig folgt also  $\mathbf{d} = 0$ . Dies steht im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

**Folgerung 2.57.** *Ein nichtleeres beschränktes Polyeder und ein nichtleeres Polyeder in Standardform enthält mindestens einen Extrempunkt bzw. eine zulässige Basislösung.*

## 2.5.6 Optimalität von Extrempunkten

Wir werden jetzt unsere aus den Beispielen gewonnene Intuition formalisieren. Falls ein LP eine Lösung hat und falls der zulässige Bereich des LP Extrempunkte aufweist, dann gibt es mindestens einen Extrempunkt, der das LP löst.

**Satz 2.58.** *Betrachte das LP  $\min_{\mathbf{x} \in P} \mathbf{c}' \mathbf{x}$ ,  $P$  ein Polyeder aus  $\mathbb{R}^n$ . Falls  $P$  einen Extrempunkt hat und falls  $\inf_{\mathbf{x} \in P} \mathbf{c}' \mathbf{x} > -\infty$ , so gibt es eine optimale Lösung, die ein Extrempunkt von  $P$  ist.*

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $P$  von der Form  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$ . Da  $P \neq \emptyset$  und da  $\inf_{\mathbf{x} \in P} \mathbf{c}' \mathbf{x} = \gamma > -\infty$ , hat das LP mindestens eine Lösung. Die Menge der Lösungen sind durch das Polyeder  $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{c}' \mathbf{x} = \gamma\}$  gegeben. Da  $P$  einen Extrempunkt hat, enthält  $P$  keine Gerade, da  $Q \subset P$  gilt dies auch für  $Q$ . Somit hat  $Q$  einen Extrempunkt  $\mathbf{x}^*$ .

Zu zeigen ist noch, dass  $\mathbf{x}^*$  auch Extrempunkt von  $P$  ist. Falls dies nicht gilt, so gibt es  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in P$ ,  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}^*$  und ein  $\lambda \in (0, 1)$  mit  $\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2$ . Damit gilt

$$\gamma = \mathbf{c}'\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{c}'\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{c}'\mathbf{x}_2$$

und somit wegen  $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq \gamma$  für alle  $\mathbf{x} \in P$   $\mathbf{c}'\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}'\mathbf{x}_2 = \gamma$ . Daraus folgt  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in Q$ , im Widerspruch zur Tatsache, dass  $\mathbf{x}^*$  ein Extrempunkt von  $Q$  ist.  $\square$

**Folgerung 2.59.** *Für ein LP in Standardform mit nichtleerem zulässigem Bereich  $P$  gilt: Entweder das LP hat keine Lösung oder es gibt eine optimale zulässige Basislösung.*

# Kapitel 3

## Das Simplex-Verfahren

### 3.1 Optimalitätsbedingungen

Die typische Struktur von Lösungsansätzen für ‘lokale’ Optimierungsprobleme ist die folgende. Sei eine zulässige Lösung gegeben, dann wird deren ‘Umgebung’ abgesucht, ob ein ‘besserer’ Punkt existiert. Ist dies der Fall, dann wird diese neue Lösung als Ausgangspunkt gewählt. Findet sich kein ‘besserer’ Punkt, dann endet der Algorithmus und man hat ein lokales Optimum gefunden.

Für lineare Programme gilt, dass jedes lokale Optimum auch ein globales Optimum ist, da der zulässige Bereich und die Zielfunktion konvex sind. Also sind lokale Optimierungsverfahren erfolgversprechend.

Sei ein  $\mathbf{x} \in P$  gegeben und man betrachte eine Richtung  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ . Eine Suche in der Richtung  $\mathbf{d}$  ist nur dann sinnvoll, falls  $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d} \in P$ .

**Definition 3.1.** Sei  $\mathbf{x} \in P$ . Ein Vektor  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  heißt *zulässige Richtung* in  $\mathbf{x}$ , falls es ein  $\theta > 0$  gibt mit  $\mathbf{x} + \theta \mathbf{d} \in P$ .

Sei  $\mathbf{x}$  eine zulässige Basislösung mit Basisvariablen  $(B(1), \dots, B(m))$  und sei

$$B = (A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)})$$

die zugehörige Basis-Matrix. Insbesondere gilt  $x_i = 0$  für alle Nicht-Basisvariablen und  $\mathbf{x}_B = (x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)})$  löst  $\mathbf{x}_B = B^{-1} \mathbf{b}$ . Wir suchen nun spezielle zulässige Richtungen  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$  der folgenden Form

- $d_j = 1$  für ein  $j \neq B(1), \dots, B(m)$
- $d_i = 0$  für alle anderen Nicht-Basisvariablen  $i \neq j$
- $\mathbf{d}_B = (d_{B(1)}, \dots, d_{B(m)})'$  wie im folgendem bestimmt



**Frage:.** Wie müssen wir den Vektor  $\mathbf{d}_B = (d_{B(1)}, \dots, d_{B(m)})'$  wählen, damit  $\mathbf{d}$  eine zulässige Richtung ist? Wir müssen zwei Bedingungen sicherstellen.

- i)  $A(\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}) = \mathbf{b}$ . Diese Bedingung ist wegen  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  erfüllt genau dann, wenn  $A\mathbf{d} = 0$ . Damit folgt

$$0 = A\mathbf{d} = \sum_{l=1}^n d_l \mathbf{A}_l = \sum_{i=1}^m d_{B(i)} \mathbf{A}_{B(i)} + \mathbf{A}_j = B\mathbf{d}_B + \mathbf{A}_j,$$

so dass  $\mathbf{d}_B = -B^{-1}\mathbf{A}_j$  gelten muss, wodurch  $\mathbf{d}_B$  eindeutig festgelegt ist.

- ii)  $\mathbf{x} + \theta\mathbf{d} \geq 0$  für ein  $\theta > 0$ . Falls  $\mathbf{x}$  nicht-degeniert, d.h. falls  $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)} > 0$ , so ist diese Bedingung nach Wahl von  $\mathbf{d}$  automatisch erfüllt. Ist  $\mathbf{x}$  degeneriert und ist  $\mathbf{d}_B = B^{-1}\mathbf{A}_j$  in mindestens einer Komponente echt kleiner Null, so muss diese Bedingung nicht erfüllt sein; hierauf müssen wir später achten.

**Definition 3.2.** Sei  $B = \{B(1), \dots, B(m)\}$  eine Basis. Der Vektor  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{d}_B = B^{-1}\mathbf{A}_j$ ,  $d_j = 1$  für ein  $j \neq B(1), \dots, B(m)$ ,  $d_i = 0$  für alle  $i \neq j, B(1), \dots, B(m)$  heißt *j-te Basisrichtung*.

Wir analysieren nun, wie sich die Zielfunktion  $\mathbf{c}'\mathbf{y}$  ändert, wenn wir von einer zulässigen Basislösung längs der *j*-ten Basisrichtung gehen. Wir erhalten

$$\mathbf{c}'\mathbf{d} = \mathbf{c}'_B \mathbf{d}_B + c_j = -\mathbf{c}'_B B^{-1} \mathbf{A}_j + c_j,$$

wobei  $\mathbf{c}_B = (c_{B(1)}, \dots, c_{B(m)})'$ . Dieser Ausdruck ist so wichtig, dass er eine formale Definition verdient.

**Definition 3.3.** Sei  $\mathbf{x}$  eine Basislösung und  $B$  eine zugehörige Basis. Definiere  $\mathbf{c}_B = (c_{B(1)}, \dots, c_{B(m)})'$ . Dann definieren wir für  $j \in \{1, \dots, n\}$  die *reduzierten Kosten* durch  $\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}'_B B^{-1} \mathbf{A}_j$ .

**Interpretation.**  $c_j$  sind die Kosten der Verwendung einer zusätzlichen Einheit von Variable  $x_j$  und  $-\mathbf{c}'_B B^{-1} \mathbf{A}_j$  gibt die Kosten an, die durch die Änderung der Basisvariablen entstehen, die notwendig sind, um die Bedingung  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  zu erfüllen.

**Bemerkung 3.4.** Falls  $j$  eine Basisvariable ist, so folgt  $B^{-1}\mathbf{A}_j = \mathbf{e}_j$ ,  $\mathbf{e}_j$  der *j*-te Einheitsvektor des  $\mathbb{R}^m$ . Damit gilt

$$\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}'_B B^{-1} \mathbf{A}_j = c_j - \mathbf{c}'_B \mathbf{e}_j = c_j - c_j = 0.$$

**Satz 3.5.** [Optimalitätskriterium] Gegeben sei eine zulässige Basislösung mit zugehöriger Basismatrix  $B = (\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)})$ . Sei  $\bar{\mathbf{c}}$  der zugehörige Vektor der reduzierten Kosten. Dann gilt

- 1) Falls  $\bar{\mathbf{c}} \geq 0$ , so ist  $\mathbf{x}$  optimal.

2) Falls  $\mathbf{x}$  optimal und nicht-degeneriert (d.h.  $x_{B(i)} > 0$  für alle  $1 \leq i \leq m$ ), so gilt  $\bar{c} \geq 0$ .

*Beweis.* zu 1) Sei  $\bar{c} \geq 0$ ,  $\mathbf{y} \in P$  zulässige Lösung und  $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ . Es folgt  $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = 0$ . Definiere  $B^C = \{1, \dots, n\} \setminus \{B(1), \dots, B(m)\}$  als Menge der Nicht-Basisvariablen. Die Bedingung  $\mathbf{A}\mathbf{d} = 0$  kann in der Form  $B\mathbf{d}_B + \sum_{i \in B^C} d_i \mathbf{A}_i = 0$  geschrieben werden. Es folgt  $\mathbf{d}_B = -\sum_{i \in B^C} d_i B^{-1} \mathbf{A}_i$  und somit

$$\mathbf{c}'\mathbf{d} = \mathbf{c}'_B \mathbf{d}_B + \sum_{i \in B^C} c_i d_i = \sum_{i \in B^C} (c_i - \mathbf{c}'_B B^{-1} \mathbf{A}_i) d_i = \sum_{i \in B^C} \bar{c}_i d_i. \quad (3.1)$$

Da  $x_i = 0$  für  $i \in B^C$  folgt aus der Zulässigkeit von  $\mathbf{y}$ , dass  $d_i \geq 0$  für alle  $i \in B^C$ . Da  $\bar{c} \geq 0$  folgt aus (3.1), dass  $\mathbf{c}'\mathbf{d} \geq 0$  und somit die Optimalität von  $\mathbf{x}$ .

zu 2) Falls  $\bar{c}_j < 0$  und  $\mathbf{x}$  nicht-degeneriert, so können wir die Kosten echt verringern, indem wir in die Richtung der  $j$ -ten Basisrichtung gehen.  $\square$

**Bemerkung 3.6.** Zur Überprüfung der Optimalität müssen wir also ‘nur’ die  $n - m$  Bedingungen  $\bar{c}_j \geq 0$ ,  $j \in B^C$  überprüfen.

**Definition 3.7.** Eine Basis  $B$  heißt *optimal*, falls

- a)  $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ , (Zulässigkeit)
- b)  $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}' - \mathbf{c}'_B B^{-1} \mathbf{A}_j \geq 0$  für alle  $j \in B^C$ . (Optimalität)

Die zugehörige Basislösung ist dann automatisch optimal.

## 3.2 Das Simplexverfahren

Sei  $\mathbf{x}$  eine nicht-degenierte zulässige Basislösung mit Basisvariablen  $B = (B(1), \dots, B(m))$ , reduzierten Kosten  $\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}'_B B^{-1} \mathbf{A}_j$ . Nach dem Optimalitätssatz (Satz 3.5) gibt es zwei Möglichkeiten.

- a) Es gilt  $\bar{c}_j \geq 0$  für alle  $1 \leq j \leq n$ . In diesem Fall ist  $\mathbf{x}$  optimal.
- b) Es gibt ein  $j$  mit  $\bar{c}_j < 0$ . Da  $\mathbf{x}$  nach Voraussetzung nicht-degeneriert ist, können wir den Wert der Zielfunktion verringern, falls wir in Richtung der  $j$ -ten Basisvariable  $d^j$  gehen, d.h. falls wir  $\mathbf{x}$  durch  $\mathbf{x} + \theta \mathbf{d}^j$  ersetzen mit  $\theta > 0$  hinreichend klein, so dass  $\mathbf{x} + \theta \mathbf{d}^j \in P$ . Da die Kosten  $\mathbf{c}'(\mathbf{x} + \theta \mathbf{d}^j) = \mathbf{c}'\mathbf{x} + \theta \bar{c}_j$  wegen  $\bar{c}_j < 0$  streng monoton fallend in  $\theta$  sind, ist es sinnvoll,  $\theta$  größtmöglich zu wählen. Wir wählen also  $\theta = \theta^* = \inf\{\theta > 0 \mid \mathbf{x} + \theta \mathbf{d}^j \notin P\}$ . Nach Wahl von  $\mathbf{d}^j$  gilt wegen  $d^j_j = 1$  und  $d^j_i = 0$ ,  $i$  eine Nicht-Basisvariable ungleich  $j$ , dass

$$\theta^* = \inf\{\theta > 0 \mid \exists l \in \{1, \dots, m\} \text{ mit } x_{B(l)} + \theta d^j_{B(l)} < 0\}.$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten.

**b1)**  $d_i^j \geq 0$  für alle  $1 \leq i \leq n$ . In diesem Fall ist  $\theta^* = \infty$ , d.h.  $\mathbf{x} + \theta \mathbf{d}^j \in P$  für alle  $\theta > 0$ . Es folgt, da

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \mathbf{c}'(\mathbf{x} + \theta \mathbf{d}^j) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} (\mathbf{c}'\mathbf{x} + \theta \bar{c}_j) = -\infty,$$

dass die Zielfunktion  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}'\mathbf{x}$  auf dem zulässigen Bereich  $P$  nach unten unbeschränkt ist, und das LP keine Lösung.

**b2)** Es gibt ein  $i$  mit  $d_i^j < 0$ . Notwendigerweise ist  $i$  eine der Basisvariablen, d.h.  $i \in \{B(1), \dots, B(m)\}$ . Nun gilt für jedes  $i$  mit  $d_i^j < 0$ , dass  $x_i + \theta d_i^j \geq 0$  genau dann, wenn  $\theta \leq -x_i/d_i^j$ . Es folgt, dass

$$\theta^* = \min \left\{ \frac{-x_{B(l)}}{d_{B(l)}^j} \mid 1 \leq l \leq m, d_{B(l)}^j < 0 \right\} < \infty. \quad (3.2)$$

Da  $\mathbf{x}$  nach Voraussetzung nicht-degeneriert ist, gilt außerdem  $\theta^* > 0$ .

Sei nun  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \theta^* \mathbf{d}^j$ . Da  $x_j = 0$  und  $d_j^j = 1$  nach der Wahl von  $\mathbf{d}^j$  folgt  $y_j = \theta^* > 0$ . Auf der anderen Seite gilt für alle Indizes  $l$ , in denen das Minimum in (3.2) angenommen wird, dass die Beziehung

$$y_{B(l)} = x_{B(l)} + \theta^* d_{B(l)}^j = 0$$

gilt. Wir wählen nun ein  $\bar{l}$  mit  $y_{B(\bar{l})} = 0$  und ersetzen in der alten Basismatrix  $B$  die Spalte  $\mathbf{A}_{B(\bar{l})}$  durch  $\mathbf{A}_j$ . Wir betrachten also die neue Matrix

$$\bar{B} = (\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(\bar{l}-1)}, \mathbf{A}_j, \mathbf{A}_{B(\bar{l}+1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)}), \quad (3.3)$$

die neuen Basisindizes sind also  $\bar{B} = \{\bar{B}(1), \dots, \bar{B}(m)\}$  mit  $\bar{B}(l) = B(l)$ ,  $l \neq \bar{l}$  und  $\bar{B}(\bar{l}) = j$ .

Nun gilt folgender Satz

**Satz 3.8 (Eigenschaften von  $\bar{B}$ ).** Für  $\bar{B}$  gilt

- Die Spalten  $(\mathbf{A}_{\bar{B}(1)}, \dots, \mathbf{A}_{\bar{B}(m)})$  sind linear unabhängig, d.h.  $\bar{B}$  ist eine Basis.
- $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \theta^* \mathbf{d}$  ist die zu  $\bar{B}$  gehörige Basislösung. Es gilt  $\mathbf{y} \in P$ .  $\mathbf{y}$  ist nicht degeneriert, falls das Minimum in (3.2) in genau einem Index  $\bar{l}$  angenommen wird.

*Beweis.* a) Falls die Vektoren  $\mathbf{A}_{\bar{B}(1)}, \dots, \mathbf{A}_{\bar{B}(m)}$  linear abhängig sind, so gibt es Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  mit  $\lambda_l \neq 0$  für mindestens ein  $l$ , so dass  $\sum_{l=1}^m \lambda_l \mathbf{A}_{\bar{B}(l)} = 0$  gilt. Es folgt, dass auch

$$\sum_{l=1}^m \lambda_l B^{-1} \mathbf{A}_{B(l)} = 0, \quad B \text{ die 'alte' Basismatrix,}$$

d.h. die Vektoren  $B^{-1}\mathbf{A}_{\bar{B}(1)}, \dots, B^{-1}\mathbf{A}_{\bar{B}(m)}$  sind linear abhängig. Nach Definition von  $\bar{B}$  ist für  $l \neq \bar{l}$   $B^{-1}\mathbf{A}_{\bar{B}(l)} = B^{-1}\mathbf{A}_{B(l)} = \mathbf{e}_l$ ,  $\mathbf{e}_l$  der  $l$ -te Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^m$ . Andererseits ist  $B^{-1}\mathbf{A}_{\bar{B}(\bar{l})} = B^{-1}\mathbf{A}_j = -\mathbf{d}_B^j$ . Nun gilt  $d_{B(\bar{l})}^j < 0$  (sonst würde das Minimum in (3.2) nicht in  $\bar{l}$  angenommen). Daher ist  $\mathbf{d}_B^j$  nicht in  $\text{span}\{\mathbf{e}_l \mid 1 \leq l \leq m, l \neq \bar{l}\}$  enthalten, im Widerspruch zur behaupteten linearen Abhängigkeit von  $B^{-1}\mathbf{A}_{\bar{B}(l)}$ ,  $1 \leq l \leq m$ .

b) Nach Konstruktion von  $\mathbf{y}$  gilt  $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$  und  $y_j = 0$  für  $j \notin \bar{B}$ , somit ist  $\mathbf{y} = \bar{B}^{-1}\mathbf{b}$  und daher die zu  $\bar{B}$  gehörige Basislösung. Ausserdem ist  $\mathbf{y}$  zulässig nach Konstruktion. Der Rest ist klar.  $\square$

Zusammenfassend sind wir also von der zulässigen Basislösung  $\mathbf{x}$  zu einer neuen zulässigen Basislösung  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \theta^*\mathbf{d}^j$  gegangen. Da  $\mathbf{x}$  nicht-degeneriert war, ist  $\theta^* > 0$  und  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ , und es gilt wegen  $\bar{c}_j < 0$ , dass  $\mathbf{c}'\mathbf{y} = \mathbf{c}'\mathbf{x} + \theta^*\bar{c}_j < \mathbf{c}'\mathbf{x}$ . Der Wechsel von  $\mathbf{x}$  zu  $\mathbf{y}$  ist ein Schritt im sogenannten Simplex-Algorithmus. Die Basen  $B$  und  $\bar{B}$  sind nach Konstruktion benachbart.

### Algorithmus 3.9 (Ein Simplex-Schritt).

1. Beginne mit einer Basis  $B = \{B(1), \dots, B(m)\}$  und einer zugehörigen nicht-degenerierten zulässigen Basislösung  $\mathbf{x}$ .
2. Bestimme die reduzierten Kosten  $\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}'_B B^{-1}\mathbf{A}_j$ ,  $j \in B^C$ . Falls  $\bar{c}_j \geq 0$  für alle  $j$ , so ist  $\mathbf{x}$  optimal und der Algorithmus endet. Andernfalls wähle ein  $j$  mit  $\bar{c}_j < 0$ .
3. Berechne  $\mathbf{u} = -\mathbf{d}_B = B^{-1}\mathbf{A}_j$ , etwa durch das Lösen des LGS  $B\mathbf{u} = \mathbf{A}_j$ . Falls alle Komponenten von  $\mathbf{u}$  negativ sind, so folgt  $\theta^* = \inf\{\theta > 0 \mid \mathbf{x} + \theta\mathbf{d}^j \in P\} = \infty$  und der Optimalwert der Zielfunktion ist  $-\infty$  (d.h. das LP hat keine Lösung); der Algorithmus endet.
4. Falls  $u_l > 0$  für mindestens ein  $l$ , dann definiere

$$\theta^* = \min \left\{ \frac{x_{B(l)}}{u_l} \mid 1 \leq l \leq m, u_l > 0 \right\} .$$

5. Wähle  $\bar{l}$  so, dass in Schritt 4 das Minimum in  $\bar{l}$  angenommen wird. Definiere eine neue Basis  $\bar{B}$  durch  $\bar{B} = \{B(1), \dots, B(\bar{l}-1), j, B(\bar{l}+1), \dots, B(m)\}$ , d.h. ersetze  $\bar{l}$ -tes Element durch  $j$ . Die zugehörige zulässige Basislösung ist  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \theta^*\mathbf{d}^j$ . Es gilt  $y_{\bar{B}(l)} = x_{B(l)} - \theta^*u_l$ ,  $l \neq \bar{l}$  und  $y_{\bar{B}(\bar{l})} = y_j = \theta^*$ .

**Bemerkung 3.10.** Bei 'naiver' direkter Ausführung des Algorithmus sind zwei lineare Gleichungssysteme zu lösen, nämlich  $B^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{c}_B$  (zur Bestimmung von  $\mathbf{p}' = \mathbf{c}'_B B^{-1}$  und somit für die Berechnung von  $\bar{c}_j = c_j - \mathbf{p}'\mathbf{A}_j$ ) und  $B\mathbf{u} = \mathbf{A}_j$  (zur Bestimmung der  $j$ -ten Basisrichtung).

**Satz 3.11 (Simplex-Algorithmus).** *Betrachte ein LP in Standardform, dessen zulässiger Bereich  $P = \{A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$  nicht-leer ist. Außerdem sei jede zulässige Basislösung nicht-degeneriert. Dann endet das oben beschriebene Simplexverfahren nach endlich vielen Schritten. Bei Beendigung des Algorithmus gibt es die folgenden Möglichkeiten.*

- a) *Wir haben eine optimale Basis und eine zugehörige optimale Basislösung.*
- b) *Wir haben einen Vektor  $\mathbf{d}$  mit  $A\mathbf{d} = 0$ ,  $\mathbf{d} \geq 0$  und  $\mathbf{c}'\mathbf{d} < 0$ , und das LP hat keine Lösung.*

*Beweis.* Da alle zulässigen Basislösungen nicht-degeneriert sind, geht der Algorithmus in einem Simplex-Schritt von einer zulässigen Basislösung  $\mathbf{x}$  zu einer neuen zulässigen Basislösung  $\mathbf{y}$  mit  $\mathbf{c}'\mathbf{x} > \mathbf{c}'\mathbf{y}$ , d.h. die Zielfunktion wird in jedem Schritt echt reduziert. Es folgt, dass jede zulässige Basislösung höchstens einmal ‘besucht’ werden kann. Da es nur endlich viele Basen und somit nur endlich viele zulässige Basislösungen gibt, muss der Algorithmus nach endlich vielen Schritten stoppen. Der Rest ist klar.  $\square$

### 3.3 Implementation des Simplex-Verfahrens

Wie bereits in Bemerkung 3.10 erwähnt, müssen bei der direkten Implementation des Simplex-Algorithmus in jedem Schritt zwei lineare Gleichungssysteme gelöst bzw. die Matrix  $B^{-1}$  bestimmt werden. Nun unterscheiden sich die Basen  $B$  und  $\bar{B}$  nur in einer Spalte, so dass es nahelegt, zu versuchen, die Inverse von  $\bar{B}^{-1}$  direkt aus  $B^{-1}$  zu bestimmen, anstatt eine erneute Matrixinversion durchzuführen. Dies ist die Grundidee der beiden folgenden beschriebenen Verfahren (revidierter Simplex-Algorithmus und Tableau-Implementation).

#### 3.3.1 Basiswechsel und elementare Zeilenoperationen

Gegeben sei eine  $m \times n$  Matrix  $C$ . Eine *elementare Zeilenoperation* (EZO) ist eine Operation der Form ‘Addiere  $\beta\mathbf{c}_j$  zu  $\mathbf{c}_i$ ’, d.h. addiere das  $\beta$ -fache der  $j$ -ten Zeile zur  $i$ -ten Zeile von  $C$ . Diese EZO’s können formal durchgeführt werden, indem man  $C$  von links mit einer  $m \times n$  Matrix  $Q$  der Form

$$Q = I_m + \beta D^{ij}, D^{ij} m \times m \text{ Matrix mit } D_{kl}^{ij} = \begin{cases} 1, & (k,l) = (i,j) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

multiplizieren, d.h. die Matrix  $\tilde{C} = QC$  bilden. Betrachte nun eine Folge von  $h$  EZOs, wobei die  $j$ -te EZO durch Multiplikation mit  $Q_j$  beschrieben werden kann. Die resultierende Matrix ist dann durch  $\tilde{C} = QC$  gegeben, wobei  $Q = Q_h Q_{h-1} \cdot \dots \cdot Q_1$ .

Betrachte nun eine Ausgangsbasis  $B$  mit zugehöriger Basismatrix

$$B = (\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)}) .$$

Die neue Basis, die durch Ersetzen von Basisvariable  $B(\bar{l})$  durch die Nicht-Basisvariable  $j$  entsteht, sei wir üblich mit  $\bar{B}$  bezeichnet, die Basismatrix ist

$$\bar{B} = (\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(\bar{l}-1)}, \mathbf{A}_j, \mathbf{A}_{B(\bar{l}+1)}, \dots, \mathbf{A}_m) .$$

Definiere  $\mathbf{u} = B^{-1}\mathbf{A}_j$  und beachte, dass im Simplex-Algorithmus  $\bar{l}$  so gewählt ist, dass  $u_{\bar{l}} > 0$ . Es gilt  $B^{-1}B = I$  und somit

$$B^{-1}\bar{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\bar{l}-1}, \mathbf{u}, \mathbf{e}_{\bar{l}+1}, \dots, \mathbf{e}_m) \begin{pmatrix} 1 & & u_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & 0 \\ & & u_{\bar{l}} & & \\ & 0 & \vdots & \ddots & \\ & & u_m & & 1 \end{pmatrix} .$$

Es folgt, dass  $B^{-1}\bar{B}$  durch eine Reihe von EZOs in die Einheitsmatrix transformiert werden kann (addiere  $(u_i/u_{\bar{l}})$ -mal die  $\bar{l}$ -te Zeile zu Zeile  $i$ , falls  $i \neq \bar{l}$  bzw. multipliziere die  $\bar{l}$ -te Zeile mit  $u_{\bar{l}}^{-1} > 0$ ). Sei  $Q$  die Matrix, durch die diese EZOs dargestellt werden können. Es gilt also

$$QB^{-1}\bar{B} = I, \quad \text{und somit} \quad QB^{-1} = \bar{B}^{-1} . \quad (3.4)$$

Es folgt aus (3.4), dass wir durch Anwenden der EZOs, durch die  $B^{-1}\bar{B}$  zur Einheitsmatrix transformiert wird, die Matrix  $B^{-1}$  in die gesuchte neue Inverse  $\bar{B}^{-1}$  transformieren können.

### 3.3.2 Das revidierte Simplexverfahren

Beginne mit einer Basis  $B = \{B(1), \dots, B(m)\}$ , einer zugehörigen nicht-degenerierten und zulässigen Basislösung  $\mathbf{x}$  und bestimme die Matrix  $B^{-1} = (\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)})^{-1}$ . Geeignete Verfahren zur Bestimmung einer Startbasis werden später diskutiert. Führe nun mit diesen Daten Schritt 1 bis 5 des ‘normalen’ Simplex-Verfahrens (Algorithmus 3.9) durch. Nun ist der nächste Schritt gegeben durch

6. Bilde die  $m \times (m + 1)$  Matrix  $(B^{-1}, \mathbf{u})$ . Transformiere die letzte Spalte durch EZOs der Form ‘Addiere das  $\beta$ -fache der  $\bar{l}$ -ten Zeile zur  $i$ -ten Zeile’ in den Einheitsvektor  $\mathbf{e}_{\bar{l}}$ . Die ersten  $m$  Spalten der so erhaltenen Matrix bilden  $\bar{B}^{-1}$ , die Inverse der neuen Basismatrix.

**Bemerkung 3.12.** Schritt 6 ist im Allgemeinen wesentlich effizienter als das erneute Durchführen einer Matrixinversion.

**Beispiel 3.13 (Schritt 6 des revidierten Simplexverfahrens).** Sei

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{l} = 3.$$

Schritt 1: Multipliziere 3.Zeile mit 2 und addiere dies zur 1.Zeile.

Schritt 2: Ziehe 3.Zeile von 2.Zeile ab.

Schritt 3: Dividiere 3.Zeile durch 2.

Wir erhalten die Inverse von  $\bar{B}$  via

$$(\bar{B}^{-1} \mid \mathbf{u}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 9 & -4 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -1 & 1 \end{array} \right)$$

### 3.3.3 Die Implementation mittels Simplex-Tableau

Gegeben sei eine Basis  $B = \{B(1), \dots, B(m)\}$  mit zugehöriger zulässiger Basislösung  $\mathbf{x}$ . Die Basisvariablen von  $\mathbf{x}$  sind durch  $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ ,  $B = (\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)})$  gegeben. Das zugehörige Simplex-Tableau ist eine  $(m+1) \times (n+1)$  Matrix  $T$  mit den folgenden Einträgen

$$T = \begin{array}{c|ccc} -\mathbf{c}'_B B^{-1}\mathbf{b} & \mathbf{c}' - \mathbf{c}'_B B^{-1}\mathbf{A} & \leftarrow 0\text{-te Zeile} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & B^{-1}\mathbf{A}_1, \dots, B^{-1}\mathbf{A}_n & \\ \hline 0\text{-te Spalte} & & \end{array}$$

Hierbei werden die Zeilen (Spalten) von 0 bis  $m$  (0 bis  $n$ ) indiziert. Die Einträge haben folgende Bedeutung.

- Die 0-te Spalte  $\mathbf{T}_0$  enthält den negativen Wert der Zielfunktion (da  $\mathbf{c}'\mathbf{x} = \mathbf{c}'_B \mathbf{x}_B = \mathbf{c}'_B B^{-1}\mathbf{b}$ ) und die Basisvariablen  $\mathbf{x}_B$  der gegenwärtigen Basislösung  $\mathbf{x}$ .
- $\mathbf{c}' - \mathbf{c}'_B B^{-1}\mathbf{A}$  ist der Vektor der reduzierten Kosten in  $\mathbf{x}$ .
- $B^{-1}\mathbf{A}_1, \dots, B^{-1}\mathbf{A}_n$  sind die negativen Basisvariablen aller möglichen Basisrichtungen

Für einen Simplex-Schritt in der Tableau-Implementation wählen wir einen Index  $j \in \{1, \dots, n\}$ , so dass die reduzierten Kosten  $\bar{c}_j$  (gegeben durch das Element  $T_{0j}$ ) echt kleiner Null sind;  $j$  wird neue Basisvariable und die  $j$ -te Spalte  $\mathbf{T}_j$  des Tableaus heißt *Pivotspalte*. Wir definieren  $\mathbf{u} = B^{-1}\mathbf{A}_j = (T_{1j}, \dots, T_{mj})'$ . Als nächstes wählen wir einen Index  $\bar{l} \in \{1, \dots, m\}$  mit

$$\theta^* = \min \left\{ \frac{x_{B(l)}}{u_l} \mid 1 \leq l \leq m, u_l > 0 \right\} = \frac{x_{B(\bar{l})}}{u_{\bar{l}}}.$$

Da  $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = (T_{10}, \dots, T_{m0})'$ , ist die hierzu nötige Information in unserem Tableau enthalten. Die  $\bar{l}$ -te Zeile  $\mathbf{t}_{\bar{l}}$  des Tableaus heißt *Pivotzeile*, das Element  $u_{\bar{l}} = T_{\bar{l}j}$  heißt *Pivotelement*. Nach der Wahl von  $\bar{l}$  gilt  $u_{\bar{l}} > 0$ . (Falls kein  $\bar{l}$  mit  $u_{\bar{l}} > 0$  existiert, so ist die Zielfunktion nach unten unbeschränkt) In einem Simplex-Schritt verläßt die Basisvariable  $B(\bar{l})$  die Basis und wird durch die Nicht-Basisvariable  $j$  ersetzt.

**Update des Tableaus.** Gegeben Pivotspalte  $j$ , Pivotzeile  $l$ . Da  $\bar{B}^{-1} = QB^{-1}$  gilt

$$\bar{B}^{-1}(\mathbf{b}, A) = QB^{-1}(\mathbf{b}, A),$$

d.h. wir erhalten die Zeilen  $\bar{\mathbf{t}}_1, \dots, \bar{\mathbf{t}}_m$  des neuen Tableaus  $\bar{T}$ , indem wir EZOs auf das ‘alte’ Tableau  $T$  anwenden. Genauer: Wir erhalten die Matrix  $(\bar{T}_{ij})_{1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq m}$ , indem wir ein Vielfaches der Pivotzeile zur Zeile  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $i \neq \bar{l}$  addieren, so dass  $\bar{T}_{jl} = 0$ . Die Zeile  $\bar{\mathbf{t}}_l$  erhalten wir, indem wir  $\mathbf{t}_l$  durch  $u_l$  dividieren; insbesondere ist also  $\bar{T}_{jl} = 1$ .

Die Regel zum update der 0-ten Zeile  $\mathbf{t}_0$  ist analog. Wir erhalten  $\bar{\mathbf{t}}_0$ , indem wir ein Vielfaches der Pivotzeile  $\bar{\mathbf{t}}_l$  zu  $\mathbf{t}_0$  addieren, so dass  $\bar{T}_{0j} = 0$ . Man kann zeigen, dass man auf diese Weise automatisch die reduzierten Kosten an der neuen Basislösung  $\mathbf{y}$  erhält. Details sind in der Literatur beschrieben.

**Algorithmus 3.14. (Ein Simplex-Schritt in der Tableau-Implementation)**

1. Gegeben sei das Tableau  $T$  zu gegebener Basis  $B$  mit zugehöriger zulässiger Basislösung  $\mathbf{x}$ .
2. Untersuche die reduzierten Kosten  $T_{0j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Falls  $T_{0j} \geq 0$  für alle  $j = 1, \dots, n$ , so ist die gegenwärtige Basis optimal und der Algorithmus endet. Andernfalls wähle  $j$  mit  $T_{0j} < 0$ .  $T_j$  ist Pivotspalte.
3. Falls  $T_{ij} \leq 0$  für alle  $1 \leq i \leq m$ , so ist der Optimalwert des LPs gleich  $-\infty$ , der Algorithmus endet.
4. Bilde  $x_{B(l)}/u_l = T_{l0}/T_{lj}$  für alle Indizes  $l$  mit  $T_{lj} > 0$ . Sei  $\bar{l}$  der Index einer Zeile mit  $T_{l0}/T_{lj} = \min\{T_{l0}/T_{lj} \mid T_{lj} > 0\}$ .
5. (Update des Tableaus) Addiere zu jeder Zeile  $\mathbf{t}_l$ ,  $l \in \{0, \dots, m\} \setminus \{\bar{l}\}$  des Tableaus ein konstantes Vielfaches von  $\bar{\mathbf{t}}_{\bar{l}}$ , so dass  $\bar{T}_{lj} = 0$  und dividiere die Pivotzeile  $\mathbf{t}_{\bar{l}}$  durch das Pivotelement  $T_{\bar{l}j}$ . Das so erhaltene Tableau ist das zur neuen Basis gehörige Tableau.

**Bemerkung 3.15. (Freiheitsgrade im Simplex-Algorithmus)** Bei der Durchführung eines Simplex-Schrittes haben wir einige Wahlmöglichkeiten.

- i) Wahl der Pivotspalte. Falls es mehr als ein  $j$  gibt mit  $\bar{c}_j = T_{0j} < 0$ , so ist die Pivotzeile nicht eindeutig bestimmt.





		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
	100	0	-7	-2	0	5	0
$x_4$	10	0	1.5	1*	1	-0.5	0
$x_1$	10	1	0.5	1	0	0.5	0
$x_6$	0	0	1	-1	0	-1	1

Die zugehörige Basislösung ist  $\mathbf{x} = (10, 0, 0, 10, 0, 0)$ . Dies ist eine degenerierte Basislösung, da die Basisvariable  $x_6$  gleich null ist.

Im aktuellen Tableau sind die reduzierten Kosten von  $x_2$  und  $x_3$  negativ. Wir wählen  $x_3$  als Pivotspalte, d.h.  $x_3$  wird in die Basis eingefügt. Die Pivotspalte ist  $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ . Da  $u_3 < 0$  berechnen wir nur  $x_{B(i)}/u_i$  für  $i = 1, 2$ . Die Werte sind gleich, weshalb wir wieder Wahlfreiheit haben, welche Variable aus der Basis entfernt wird. Wir wählen  $l = 1$  und damit  $x_{B(2)} = x_4$ . Das Pivotelement ist durch einen Stern gekennzeichnet. Durch Anwendung von elementaren Zeilenoperationen der Form "Addiere das x-fache der Pivotzeile zu einer Zeile" formen wir die Pivotspalte in einen Einheitsvektor um. Dadurch erhalten wir das folgende Tableau:

		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
	120	0	-4	0	2	4	0
$x_3$	10	0	1.5	1	1	-0.5	0
$x_1$	0	1	-1	0	-1	1	0
$x_6$	10	0	2.5*	0	1	-1.5	1

Wir sind in der Basislösung  $\mathbf{x} = (0, 0, 10, 0, 0, 10)$  und Zielfunktionswert ist -120. In diesem Punkt sind nur die reduzierten Kosten von  $x_2$  negativ, d.h. wir bringen  $x_2$  in die Basis und  $x_6$  wird aus der Basis gestrichen. Das entsprechende Tableau ist:

		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
	136	0	0	0	3.6	1.6	1.6
$x_3$	4	0	0	1	0.4	0.4	-0.6
$x_1$	4	1	0	0	-0.6	0.4	0.4
$x_6$	4	0	1	0	0.4	-0.6	0.4

Wir haben nun den Punkt  $\mathbf{x} = (4, 4, 4, 0, 0, 0)$  erreicht. Dieser ist optimal, da alle reduzierten Kosten nichtnegativ sind. Der optimale Wert der Zielfunktion ist -136.

In diesem Beispiel haben wir drei Basiswechsel benötigt um zur optimalen Lösung zu kommen. Mit anderen Pivotauswahlregeln sind auch andere Wege möglich und die Anzahl der Basiswechsel kann variieren. In diesem Beispiel müssen aber stets mindestens drei Basiswechsel stattfinden, da die Ausgangs- und Endbasislösung sich in drei Spalten unterscheiden.

## 3.4 Degeneriertheit und der Simplexalgorithmus

### 3.4.1 Probleme bei Degeneriertheit

Im Standard-Simplex-Algorithmus können bei Degeneriertheit die folgenden Probleme auftreten.

- i) Die gegenwärtige Basislösung  $\mathbf{x}$  ist degeneriert. In diesem Fall ist  $\theta^* = 0$  möglich, so dass der Basiswechsel zwar zu einer neuen Basis  $B$  führt, die zugehörige Basislösung ist aber weiterhin  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \theta^* \mathbf{d}^j = \mathbf{x}$ . Nun gibt es zwei Möglichkeiten, entweder wir erreichen nach einigen Basiswechseln eine Basis mit zugehöriger Basislösung  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ , oder es treten Zyklen (Endlosschleifen) im Algorithmus auf.
- ii) Falls  $\theta^*$  positiv ist, aber in  $\mathbf{x} + \theta^* \mathbf{d}$  mehr als  $n - m$  Komponenten verschwinden, so ist die neue Basislösung degeneriert. Dies passiert genau dann, wenn die Pivotzeile nicht eindeutig bestimmt ist.

### 3.4.2 Vermeidung von Zyklen durch geeignete Pivotregeln

#### a) Lexikographische Pivotregel.

**Definition 3.17.** Ein Vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  heißt *lexikographisch positiv*, falls die erste von Null verschiedene Komponente von  $\mathbf{u}$  echt größer als 0 ist.  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  heißt *lexikographisch größer* als  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , falls  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  lexikographisch positiv ist. Schreibweise:  $\mathbf{u} >^L \mathbf{v}$ .

**Beispiel 3.18.**  $(0, 2, 1, 4) <^L (0, 2, 3, 0)$

#### Lexikographische Pivotregel.

1. Wähle beliebige Pivotspalte  $j$  mit  $\bar{c}_j < 0$ . Sei  $\mathbf{u} = B^{-1} \mathbf{A}_j$ .
2. Für jedes  $l$  mit  $u_l > 0$  dividiere die  $l$ -te Zeile des Tableaus (auch  $j$ -te Spalte) durch  $u_l$ . Wähle die lexikographisch kleinste Zeile  $\bar{l}$  als Pivotzeile.
3. Basiswechsel: Ersetze  $\mathbf{A}_{B(\bar{l})}$  durch  $\mathbf{A}_j$ .

**Beispiel 3.19.** Ausgangstableau ohne 0-te Zeile:

1	0	5	3	...
2	4	6	-1	...
3	0	7	9	...

Annahme: 3.Spalte ist Pivotspalte. Die Pivotzeile ist nicht eindeutig bestimmt, da  $x_{B(1)}/u_1 = x_{B(3)}/u_3 = 1/3$ . Nach der lexikographischen Regel erhalten wir für die 1.Zeile  $(1/3, 0, 5/3, 1, \dots)$  und für die 3. Zeile  $(1/3, 0, 7/9, 1, \dots)$ . Da  $7/9 < 5/3$  ist somit die 3.Zeile die Pivotzeile.

Falls die Pivotzeile eindeutig ist, so reduziert sich die lexikographische Pivotregel auf die Standardregel zur Wahl der Pivotzeile.

**Satz 3.20.** *Es werden folgenden Annahmen getroffen:*

1. *Der Simplex-Algorithmus beginnt mit einer Ausgangsbasis, so dass alle Zeilen  $t_l$  (außer der Nullten) im Tableau lexikographisch positiv sind. (Dies ist z.B. der Fall, wenn die Ausgangsbasis nicht-degeneriert ist.)*
2. *Die lexikographische Pivotregel wird angewandt.*

*Dann gilt:*

- a) *Alle Zeilen (außer 0-ten Zeile) bleiben lexikographisch positiv.*
- b) *Die 0-te Zeile wächst streng monoton in lexikographischer Ordnung.*
- c) *Das Simplexverfahren endet nach endlich vielen Schritten.*

*Beweis.* a) siehe Literatur.

b) Die reduzierten Kosten  $\bar{c}_j$  in der Pivotspalte sind  $< 0$ . Um sie ‘zu Null zu machen’ müssen wir wegen  $u_l > 0$  ein positive Vielfaches der Pivotzeile addieren. Da diese lexikographisch echt positiv ist, ist diese neue 0-te Zeile lexikographisch echt größer als die alte.

c) Die Endlichkeit des Algorithmus folgt, da auf Grund von Aussage b) keine Basis zweimal besucht werden kann, denn die Basis legt die 0-te Zeile  $t_0$  des Tableaus eindeutig fest.  $\square$

### b) Bland’s Regel.

1. Wähle kleinstes  $j$  mit  $\bar{c}_j < 0$  als Pivotspalte.
2. Wähle kleinstmöglichen Wert für  $l$  als Pivotzeile.

Es ist bekannt, dass diese Regel immer nach endlich vielen Schritten endet, entweder mit einer optimalen Basis oder mit einem Strahl, entlang dessen die Zielfunktion gegen  $-\infty$  konvergiert.

## 3.5 Bestimmen einer zulässigen Startlösung

**Problem:** Zum ‘Start’ der Simplex-Methode benötigen wir eine zulässige Basislösung mit Startbasis  $B$ . Im Allgemeinen muss man dafür ein ‘Hilfsprogramm’ lösen. Gegeben sei das folgende Problem in Standardform

$$\min \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad \text{bzgl.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0. \quad (3.5)$$

Annahme:  $\mathbf{b} \geq 0$  (durch Multiplikation der Zeilen von  $A$  mit  $-1$  immer erreichbar)

Betrachte folgendes Hilfsproblem: Sei  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  Vektor von Hilfsvariablen. Löse dann

$$\min y_1 + \dots + y_m \quad \text{bzgl.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \geq 0. \quad (3.6)$$

Es gilt nun:

**Lemma 3.21.** *i) Sei  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  eine Lösung von (3.6) mit Kosten gleich 0. Dann ist  $\mathbf{x}$  zulässig in (3.5).*

*ii) Falls  $\mathbf{x}$  zulässig in (3.5), so ist  $(\mathbf{x}, 0)$  eine optimale Lösung von (3.6).*

*Beweis.* klar. □

**Bemerkung 3.22.** i) Eine zulässige Basislösung für (3.6) ist durch  $\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{y} = \mathbf{b}$  gegeben, die Basismatrix ist die Identität.

ii) Falls (3.6) keine Lösung hat oder falls die optimalen Kosten in (3.6) größer Null sind, so ist der zulässige Bereich von (3.5) leer. Lemma 3.21 liefert also ein algorithmisches Verfahren, um die Zulässigkeit von (3.5) zu testen.

Bisher haben wir ein Verfahren zur Bestimmung einer zulässigen Lösung erhalten. Wir benötigen aber eine zulässige Basislösung um den Simplex-Algorithmus starten zu können. Wir haben folgende Situation nach dem Lösen des Hilfsprogrammes: Wir haben eine Lösung  $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* = 0$  und eine Basis  $\tilde{B}$  für das Hilfsproblem.

Fall 1:  $\tilde{B}$  enthält nur Spalten der Ausgangsmatrix  $A$ . In diesem Fall ist  $\tilde{B}$  auch zulässige Basis für Originalproblem mit zugehöriger Basislösung  $\mathbf{x}^*$  und wir können den 'normalen' Simplexalgorithmus starten.

Fall 2:  $\tilde{B}$  enthält künstliche Basisvariablen und  $(\mathbf{x}, \mathbf{y} = 0)$  ist degenerierte zulässige Basislösung für das Hilfsproblem. Sei dann  $k$  die Anzahl der Spalten von  $A$  in  $\tilde{B}$ , ( $k < m$ ). Durch ein Umm Nummerieren können wir annehmen, dass dies die Spalten  $\mathbf{A}_{\tilde{B}(1)}, \dots, \mathbf{A}_{\tilde{B}(k)}$  sind. Es folgt, dass  $x_{\tilde{B}(l)} = 0$  für  $l > k$ . Aufgrund unserer Dauerannahme  $\text{rg} A = m$  können wir  $m - k$  weitere Spalten  $\mathbf{A}_{B_{k+1}}, \dots, \mathbf{A}_{B_m}$  wählen, so dass

$$B = (\mathbf{A}_{\tilde{B}(1)}, \dots, \mathbf{A}_{\tilde{B}(k)}, \mathbf{A}_{B_{k+1}}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)})$$

invertierbar ist. Es folgt, dass  $\mathbf{x}^* = (x_{B(1)}, \dots, x_{B(k)}, 0, \dots, 0)$  auch eine  $B$  zugeordnete Basislösung ist und somit eine zulässige Basislösung für das Ausgangsproblem.

**Bemerkung 3.23.** Algorithmisch kann dies mittels des Simplex-Tableaus durchgeführt werden. (siehe Literatur)

## 3.6 Performance des Simplex-Algorithmus

Für die Performance gibt es zwei Faktoren:

- Rechenaufwand je Iterationen
- Anzahl der Iterationen

Der Aufwand je Iteration beträgt etwa  $\mathcal{O}(mn)$  arithmetische Operationen beim Tableau-Verfahren und ‘voller’ Simplexmethode (im schlechtesten Fall). Die Anzahl der Iterationen ist schwieriger abzuschätzen.

- Es gibt Beispiele, wo (bei Wahl einer ungünstigen Pivotregel) die Anzahl der Iterationen exponentiell mit  $n$  wächst.
- Praktische Erfahrungen zeigen aber, dass die Anzahl der Iterationen meist linear in  $n$  wächst.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, dass der Simplex-Algorithmus (bei guter Implementation) ein effizienter Algorithmus ist (auch wenn es andere Verfahren, etwa Innere-Punkt-Methoden, gibt).

## 3.7 Dualität und das Simplexverfahren

### 3.7.1 Primale und duale Optimalität

Betrachte ein LP in Standardform (mit linear unabhängigen Zeilen)

$$(PP) \quad \min \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad \text{bzgl.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

und das zugehörige duale Problem

$$(DP) \quad \max \mathbf{p}'\mathbf{b} \quad \text{bzgl.} \quad \mathbf{A}'\mathbf{p} \leq \mathbf{c}$$

und beachte, dass sich die duale Zulässigkeit auch in der Form  $\mathbf{p}'\mathbf{A} \leq \mathbf{c}'$  schreiben läßt. Nun gilt.

**Proposition 3.24.** *Sei  $B$  eine Basis (des PP) mit zugehöriger zulässiger, nicht-degenerierter Basislösung  $\mathbf{x}$ . Dann ist  $B$  optimal genau dann, wenn  $\mathbf{p}$  mit  $\mathbf{p}' = \mathbf{c}'_B B^{-1}$  zulässig ist im dualen Problem.*

*Beweis.* Da  $\mathbf{x}$  nicht-degeneriert ist, ist  $\mathbf{x}$  optimal genau dann, wenn die reduzierten Kosten  $\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}'_B B^{-1} \mathbf{A}_j \geq 0$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Dies ist aber äquivalent dazu, dass

$$\mathbf{c}'_B B^{-1} \mathbf{A}_j = \mathbf{p}' \mathbf{A}_j \leq c_j \quad \forall j.$$

In Matrixschreibweise entspricht dies der Ungleichung  $\mathbf{p}'\mathbf{A} \leq \mathbf{c}$ . □

**Folgerung 3.25.** *Unter den Voraussetzungen der Proposition 3.24 ist  $\mathbf{p}' = \mathbf{c}'_B B^{-1}$  eine Lösung des DP.*

*Beweis.* Es gilt

$$\mathbf{p}'\mathbf{b} = \mathbf{c}'_B B^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}'_B \mathbf{x}_B = \mathbf{c}'\mathbf{x} .$$

Da  $\mathbf{p}$  dual zulässig, folgt die Aussage sofort aus der schwachen Dualität.  $\square$

**Anwendung (Dualität und Schattenpreise.)** Wir wollen nun untersuchen, wie sich der Optimalwert der Zielfunktion eines LPs in Standardform bei einer Störung der rechten Seite verändert und ersetzen  $\mathbf{b}$  durch  $\mathbf{b} + \mathbf{d}$  für  $\mathbf{d}$  klein. Falls das LP ein Kostenminimierungsproblem zur Produktion des outputs  $\mathbf{b}$  modelliert, und falls  $\mathbf{d} = \lambda \mathbf{e}_j$ , so gibt die Antwort gerade die Grenzkosten der Produktion einer weiteren Einheit von output  $j$  an (Schattenpreis von output  $j$ ).

Sei  $\mathbf{x}^*$  eine nicht-degenerierte optimale zulässige Basislösung des PP. Da  $\mathbf{x}^*$  nicht-degeneriert ist, ist mit  $\mathbf{x}_B^* = B^{-1}\mathbf{b}$  auch  $\tilde{\mathbf{x}}_B = B^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) > 0$  für  $\mathbf{d}$  genügend klein, so dass  $B$  also auch eine zulässige Basis für das LP mit 'rechter Seite'  $\mathbf{b} + \mathbf{d}$  ist. Nach Definition sind die reduzierten Kosten durch

$$\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}'_B B^{-1}\mathbf{A}_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

gegeben und somit unabhängig von  $\mathbf{b}$ . Da  $\mathbf{x}^*$  nicht-degeneriert ist, folgt  $\bar{c}_j \geq 0$  für alle  $j$  (sonst ist  $\mathbf{x}^*$  nicht optimal). Nach dem Optimalitätskriterium ist also  $B$  auch eine optimale Basis für das Problem mit 'rechter Seite'  $\mathbf{b} + \mathbf{d}$  für  $\mathbf{d}$  genügend klein. Die Basisvariablen der zugehörigen Optimallösung sind durch  $\tilde{\mathbf{x}}_B = B^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$  gegeben. Es folgt für den Optimalwert der Zielfunktion

$$\mathbf{c}'\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{c}'_B \tilde{\mathbf{x}}_B = \mathbf{c}'_B B^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) = \mathbf{c}'_B \mathbf{x}_B + \mathbf{c}'_B B^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{p}'\mathbf{d} ,$$

wobei  $\mathbf{p}' = \mathbf{c}'_B B^{-1}$  die Lösung des DP aus Proposition 3.24 ist. Somit wird die Änderung des Optimalwertes gerade durch die Lösung  $\mathbf{p}$  des DP beschrieben; insbesondere gibt  $p_j$ ,  $1 \leq j \leq m$  den Schattenpreis von output  $j$  an.

### 3.7.2 Die duale Simplexmethode

Wenn man zu einer zulässigen Basis  $B$  mit nicht-degenerierter Basislösung  $\mathbf{x}$  den dualen Vektor  $\mathbf{p}$  mit  $\mathbf{p}' = \mathbf{c}'_B B^{-1}$  assoziiert, so ist - wie gerade gezeigt - primale Optimalität äquivalent zu dualer Zulässigkeit. Dies legt einen alternativen Ansatz zur Bestimmung von Optimallösungen nahe. Während man im Standard-Simplexverfahren bei einem Basiswechsel die primale Zulässigkeit erhält und auf Optimalität/duale Zulässigkeit hinarbeitet (eine sogenannte primale Methode), so kann man alternativ versuchen, dual zulässige Lösungen zu finden und auf primale Zulässigkeit/duale Optimalität hinarbeiten. Dies ist die Grundidee der dualen Simplexmethode.

Betrachte ein LP in Standardform mit  $\text{rg}A = m$ . Sei  $B$  eine Basismatrix mit

$$\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}'_B B^{-1}\mathbf{A}_j \geq 0 \quad \forall j ,$$

so dass  $\mathbf{p}$  mit  $\mathbf{p}' = \mathbf{c}'_B B^{-1}$  dual zulässig ist. Falls  $B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ , so ist  $B$  optimal. Andernfalls versuchen wir durch geeignete Basiswechsel ‘Schritt für Schritt’ die Komponenten von  $B^{-1}\mathbf{b}$  positiv zu machen unter Wahrung der dualen Zulässigkeitsbedingung  $\bar{c}_j \geq 0$  für alle  $j$ .

**Bemerkung 3.26.** Obige Situation liegt insbesondere dann vor, wenn man eine Optimallösung  $\mathbf{x}^*$  zu einer rechten  $\mathbf{b}$  gefunden hat und nun das LP mit rechter Seite  $\mathbf{b} + \mathbf{d}$  lösen will. Falls  $\mathbf{d}$  nicht ‘klein’ ist, so muss die Bedingung  $B^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) \geq 0$  nicht gelten,  $B$  bleibt aber dual zulässig, da  $\bar{c}_j > 0$  für alle  $j$ .

Zur algorithmischen Durchführung der dualen Simplexmethode kann man wiederum das Simplex-Tableau verwenden. Betrachte das zur Basis  $B$  gehörige Tableau.

$$T = \left| \begin{array}{c|c} -\mathbf{c}'_B B^{-1}\mathbf{b} & \bar{\mathbf{c}}' \\ \hline B^{-1}\mathbf{b} & B^{-1}\mathbf{A}_1, \dots, B^{-1}\mathbf{A}_n \end{array} \right|$$

Beachte, dass  $B^{-1}\mathbf{b}$  nicht unbedingt  $\geq 0$  ist. Wir nehmen aber an, dass  $\bar{\mathbf{c}} \geq 0$ , so dass  $\mathbf{p}$  mit  $\mathbf{p}' = \mathbf{c}'_B B^{-1}$  dual zulässig. Die dualen Kosten sind  $\mathbf{p}'\mathbf{b} = \mathbf{c}'_B B^{-1}\mathbf{b}$ , also analog zum primalen Simplex durch  $-T_{00}$  gegeben. Weiterhin sei  $B^{-1}\mathbf{b}$  in mindestens einer Komponente echt  $< 0$  (sonst sind wir fertig). Wähle  $l$  mit  $(B^{-1}\mathbf{b})_l < 0$ . Die  $l$ -te Zeile ist dann die Pivotzeile. Wähle nun einen Index  $j$  mit

$$\frac{\bar{c}_j}{|T_{lj}|} = \min \left\{ \frac{\bar{c}_i}{|T_{li}|} \mid 1 \leq i \leq n, T_{li} < 0 \right\}.$$

Die Spalte  $j$  ist die Pivotspalte. (Falls  $T_{li} > 0$  für alle  $1 \leq i \leq n$ , so ist der Wertebereich des DP nach oben unbeschränkt, wie man leicht zeigt.) Wir führen nun einen Basiswechsel durch, wobei der Index  $B(l)$  die Basis verläßt und durch den Index  $j$  ersetzt wird.

### Aktualisierung des Tableaus

Das neue Simplex-Tableau wird wiederum mit Hilfe von EZOs aus dem alten Tableau bestimmt. Zu jeder Zeile des Tableaus wird ein Vielfaches der Pivotzeile addiert, so dass die Pivotspalte in den Einheitsvektor  $\mathbf{e}_l$  transformiert wird. Wir betrachten nun die Zeile  $\mathbf{t}_0$  des Tableaus. Wir haben  $\bar{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{t}_0 - \bar{c}_j/T_{lj}\mathbf{t}_j$ , d.h. für alle  $i$  mit  $T_{li} < 0$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{0i} &= T_{0i} + \frac{\bar{c}_j}{|T_{lj}|} T_{li} = \bar{c}_i + \frac{\bar{c}_j}{|T_{lj}|} T_{li} \\ &\geq \bar{c}_i + \frac{\bar{c}_i}{|T_{li}|} T_{li} = 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Wahl von  $j$  folgt. Falls  $T_{li} \geq 0$ , so ist  $\bar{T}_{0i} \geq T_{0i} > 0$ . Bei unserem Basiswechsel bleibt die 0-te Zeile des Tableaus also nicht-negativ und  $(\bar{\mathbf{c}}'_B \bar{B}^{-1})'$  ist wiederum dual zulässig.



Falls  $\bar{c}_j = T_{0j} > 0$ , so müssen wir ein echt positives Vielfaches von  $\mathbf{t}_l$  zu  $\mathbf{t}_0$  addieren, um  $\bar{\mathbf{t}}_0$  zu erhalten. Da  $x_B(l) = T_{l0} < 0$ , wird dadurch bei der Aktualisierung des Tableaus das Element  $T_{00} = -\mathbf{c}'_B B^{-1} \mathbf{b}$  echt verkleinert und der Algorithmus kann keine Basis zweimal ‘besuchen’. Also endet das Verfahren nach endlich vielen Schritten.

Zusammengefaßt haben wir

**Algorithmus 3.27. (Duale Simplexmethode)**

1. Ausgangspunkt: Tableau mit Basismatrix  $B$ , alle reduzierten Kosten positiv,  $B$  nicht notwendigerweise zulässig.
2. Untersuche  $B^{-1} \mathbf{b}$ . Falls  $B^{-1} \mathbf{b} \geq 0$ , so ist  $B$  optimal, der Algorithmus endet. Sonst wähle  $l$  mit  $x_{B(l)} < 0$ . (Pivotzeile)
3. Betrachte  $l$ -te Zeile des Tableaus. Falls  $T_{li} \geq 0$  für alle  $i \geq 1$ , dann sind optimale Kosten  $\infty$ , Algorithmus endet.
4. Für alle  $i$  mit  $T_{li} < 0$  berechne  $\bar{c}_i/|T_{li}|$ . Sei  $j$  ein Index mit

$$\frac{\bar{c}_j}{|T_{lj}|} = \min_{i|T_{li}<0} \frac{\bar{c}_i}{|T_{li}|},$$

$j$  Pivotspalte.  $\mathbf{A}_{B(l)}$  verlässt die Basis,  $\mathbf{A}_j$  ist neue Spalte in Basismatrix.

5. Addiere zu jeder Zeile des Tableaus ein Vielfaches der Pivotzeile, so dass  $\bar{T}_{lj} = 1$  und alle anderen Elemente der Pivotspalte gleich 0.

**Beispiel 3.28 (Ein dualer Simplex-Schritt).** Betrachte folgendes Ausgangstableau.

	0	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_4$	2	-2	4	1	1	0
$x_5$	-1	4	-2	-3	0	1

Da  $x_{B(2)} < 0$ , ist die 2. Zeile Pivotzeile ( $l = 2$ ). Als nächstes wählen wir die Pivotspalte: Es sind  $T_{22}, T_{23} < 0$ . Wir vergleichen also  $\frac{\bar{c}_i}{|T_{2i}|}$ ,  $i = 2, 3$  und erhalten:

$$i = 2: \frac{\bar{c}_2}{|T_{22}|} = \frac{6}{2} = 3$$

$$i = 3: \frac{\bar{c}_3}{|T_{23}|} = \frac{10}{3} > 3$$

Also ist  $j = 2$  die Pivotspalte. Das neue Tableau ergibt sich wie folgt, wobei  $x_4$  und  $x_2$  die Basisvariablen sind;  $x_5$  verlässt die Basis. Die Einträge ergeben sich durch EZOs.

		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
	-3	14	0	1	0	3
$x_4$	0	6	0	-5	1	2
$x_2$	$\frac{1}{2}$	-2	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

Die Kosten sind gleich 3, also größer 0. Alle Basisvariablen sind jetzt positiv, so dass wir ein Optimum gefunden haben.