Skriptum Einstiegstest
SBWL Produktionsmanagement

Stand: Juli 2019

Zusätzlich zum vorliegenden Skriptum sind folgende Buchkapitel relevant für den Einstiegstest der SBWL:

Kummer, Jammernegg, Grün (2019): Grundzüge der Beschaffung, Produktion und Logistik, 4. aktualisierte Auflage, Pearson Studium

- Kapitel 8: Bedarfsermittlung
- Kapitel 11: Bestellung
- Kapitel 14: Produktion
- Kapitel 16: Produktionsmanagement

Inhaltsverzeichnis

1 Statistik[1]

1.1 Einleitung

Der erste Teil dieses Skriptums beschäftigt sich mit einer kompakten Darstellung von statistischen und stochastischen Begriffen, welche wichtig für das Verständnis mathematischer Methoden des Produktions- und Prozessmanagement sind.
Generell wird im Produktionsmanagement sehr häufig nach Prozessverbesserungen gesucht. Um etwas verbessern zu können, muss man den aktuellen Status des Prozesses genau kennen und beschreiben können. Möchte man quantitative Aussagen über einen Prozess treffen, so bedient man sich sehr häufig der beschreibenden (oder deskriptiven) Statistik.
Jedoch bedeutet eine quantitative Beschreibung eines Prozesses nicht die Auswertung aller möglichen Messwerte einer Grundgesamtheit. Zum Beispiel gibt es Materialprüfungen, die das Produkt zerstören, wie etwa Reißfestigkeitstests oder chemische Tests bei bereits sterilisierten und verpackten Impfstoffen. Andererseits, gibt es Produkte bei denen der Test jedes Stückes vom Gesetz vorgeschrieben ist (z.B. Kondome). Allerdings verursacht der Testprozess oft Mehrkosten und daher einen höheren Preis für den Endverbraucher.

Eine Grundgesamtheit (oft auch Population genannt) ist eine Menge von Objekten, welche zumindest in einem Gesichtspunkt (Merkmal) gleichartig sind.

Um trotzdem eine Aussage über die Qualität solcher Produkte treffen zu können, muss man daher Stichproben aus dieser Grundgesamtheit ziehen und diese testen.

Eine (zufällig) ausgewählte, beliebige echte Teilmenge einer Grundgesamtheit nennt man Stichprobe.

Der Zusammenhang zwischen Stichprobe und Grundgesamtheit ist, dass man mit einer Stichprobe versucht die Merkmale einer Grundgesamtheit abzuschätzen. Mit anderen Worten, kann man mit bekanntem Anteil n eines Merkmals in einer Stichprobe denselben Anteil N in der Grundgesamtheit schätzen.

Es gibt 2 Arten, wie man Statistik verwenden kann:

1) „Beschreibende Statistik“ (Deskriptive Statistik) → Dieser Zweig der Statistik umfasst alle Techniken um einen Datensatz summarisch darzustellen. Kenngrößen (Lage- und Streuungsmaße) werden berechnet, um Merkmale eines Datensatzes beschreiben zu können.

[1] Bleymüller, Gehlert, Gülicher (2000): Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, 12.Auflage, Verlag Vahlen, München

2) „Beurteilende Statistik" (Inferenzstatistik) → Informationen eines beschränkten Datensatzes (Stichprobe) werden verwendet, um Schlussfolgerungen auf die Grundgesamtheit zu ziehen bzw. Parameter der Grundgesamtheit zu schätzen.

Zur Vollständigkeit sei an dieser Stelle erwähnt, dass eine generelle Unterscheidung zwischen qualitativen und quantitativen und zwischen diskreten und stetigen Merkmalen (Variablen) existiert.

Qualitativ	→ Ergebnis durch Einteilung in Kategorien, z.B. Geschlecht, Familienstand
Quantitativ	→ Ergebnis durch eine Art Zählen z.B. Alter, Körpergröße
Diskret	→ Nur bestimmte Werte können realisiert werden, z.B. Anzahl Studenten
Stetig	→ Alle beliebigen Werte auf einer Zahlengeraden können realisiert werden, z.B. Länge

1.2 Parameter und Schätzgrößen

Kenngrößen, die eine Grundgesamtheit beschreiben, nennt man Parameter. Diese werden im Allgemeinen in griechischen Buchstaben ausgedrückt (z.B. μ, σ)
Kenngrößen, die eine Stichprobe beschreiben, nennt man Schätzgrößen und diese werden in lateinischen Kleinbuchstaben ausgedrückt (z.B. $\bar{x}$, s)
Die Aussagekraft von Schätzwerten wird durch zwei Merkmale bestimmt:

- Wie **repräsentativ** ist die Stichprobe?
  Repräsentativ heißt, dass alle Einheiten der Grundgesamtheit die gleiche Chance haben, ausgewählt zu werden.
- Wie **groß** ist die Stichprobe?
  Größere repräsentative Stichproben lassen kleinere Abweichungen erwarten als kleine.

Da eine einfache Auflistung von Daten bzw. eine Häufigkeitstabelle sehr viele Informationen in einer eher unübersichtlichen Form enthält, versucht man das vorhandene Datenmaterial auf einige wenige Parameter (Kennzahlen) zu verdichten. In weiterer Folge werden die wichtigsten dieser Parameter vorgestellt.

1.2.1 Kenngrößen zur Beschreibung der Lage (Lagemaße)

Mittelwert (arithmetisches Mittel)

Der (arithmetische) Mittelwert ist der Durchschnitt aller Werte eines Datensatzes.

Mittelwert der Grundgesamtheit

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Mittelwert der Stichprobe

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

wobei $\bar{x}$ = Mittelwert der Stichprobe
x_i = Wert der Stichprobe i
n = Stichprobengröße
μ = Mittelwert der Grundgesamtheit
N = Größe der Grundgesamtheit

Werden die einzelnen Merkmalwerte x_i mit relativen oder absoluten Häufigkeiten gewogen, bezeichnet man μ als gewogenes arithmetisches Mittel.

Median (Zentralwert)

Ordnet man Daten in aufsteigender oder absteigender Reihenfolge (Rangskala), dann stellt der Wert, bei dem 50% der Werte rechts und 50% der Werte links stehen, den Median dar. Ist dabei die Anzahl N der Messwerte ungerade, dann ist die Stellung des Medians bei (N+1)/2. Ist N eine gerade Zahl, so ergeben sich zwangsläufig zwei mittlere Werte an den Stellen N/2 und N/2 + 1 und der Median ist dann das arithmetische Mittel dieser Werte.

Erwähnenswert ist, dass der Median robust gegen Ausreißer ist. Im Gegensatz dazu wird das arithmetische Mittel von Ausreißern verzerrt.

Vergleich arithmetisches Mittel und Median:

Eine bestimmte Dienstleistung wird von 8 Versuchspersonen durchgeführt. Die (unterschiedlichen) benötigten Zeiten (Minuten) werden in einer Rangskala geordnet:

15; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 46;.

Da die Anzahl der Messwerte gerade ist, ist der Median (19 + 20)/2 = 19,5 Minuten.

In diesem Beispiel erkennt man sehr deutlich, dass der extrem große Messwert 46 einen starken Einfluss auf das arithmetische Mittel ($\bar{x}$ = 22,25 Minuten), jedoch nicht auf den Median hat.

Modalwert

Der Modalwert oder Modus ist der „häufigste Wert“ in einer Häufigkeitsverteilung bzw. in einer Messreihe oder einem Datensatz.

1.2.2 Kenngrößen zur Beschreibung der Variation (Streuungsmaße)

Spannweite

Ein sehr einfaches aber ungenaues Maß für die Streuung der Daten ist die Spannweite. Dabei ist das Minimum der kleinste und das Maximum der größte Wert einer Stichprobe. Die Spannweite selbst ist die Differenz zwischen Maximum und Minimum. Der Nachteil der Spannweite ist, dass diese nicht unabhängig von der Stichprobengröße ist und nur zwei Werte für die Berechnung herangezogen werden, um die Variation der gesamten Population zu beschreiben. Dadurch geht viel wertvolle Information verloren.

Varianz

Die Varianz ist bei weitem das wichtigste Streuungsmaß der Statistik und stellt das arithmetische Mittel der quadrierten Abweichungen der einzelnen Merkmalswerte von ihrem Mittelwert dar.

Varianz der Grundgesamtheit

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}$$

Varianz der Stichprobe

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Die Vorteile der Varianz als quadrierte Abweichungen sind folgende:

- Alle Abweichungen werden durch das Quadrieren positiv.
- Größere Abweichungen gehen stärker in die Berechnung ein.
- Sind Varianzen **unabhängig** voneinander, so kann man diese addieren.

Entscheidend für die Additivität der Varianzen ist, dass sie unabhängig sind, da sonst Kovarianzen miteinbezogen werden müssen (siehe dazu S. 7)

.

Standardabweichung

Die Standardabweichung ist als positive Quadratwurzel der Varianz definiert.

Standardabweichung der Grundgesamtheit

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i - \mu)^2}{N}}$$

Standardabweichung der Stichprobe

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Intuitiv ausgedrückt, kann man die Standardabweichung als eine Art arithmetisches Mittel der Abstände der einzelnen Datenpunkte zum Mittelwert selbst verstehen.

Der Vorteil der Standardabweichung ist, dass die Information aller Datenpunkte in dieses Streuungsmaß einfließt und dass man einen Anhaltspunkt über erwartete Abweichungen vom

Mittelwert neuer Datenpunkte erhält. Ein Nachteil jedoch ist die Nicht-Additivität der Standardabweichung.

Anmerkung zur Berechnung von Standardabweichung und Varianz:

Es empfiehlt sich, eine einfache Tabelle zu zeichnen und die jeweilige Formel anzuwenden, um diese zwei Streuungsmaße zu berechnen.

	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 /(n-1)$	
51,7	-0,45	0,2025	0,0405	
51,8	-0,35	0,1225	0,0245	
51,9	-0,25	0,0625	0,0125	
52,3	0,15	0,0225	0,0045	
52,6	0,45	0,2025	0,0405	
52,6	0,45	0,2025	0,0405	
Mittelwert			0,163	$\sum_{i=1}^{n}$ → **Varianz (s^2)**
52,15			0,4037	$\sqrt{\ }$ → **Standardabweichung (s)**

Stichproben- Kovarianz

Soll der Zusammenhang zweier Merkmale x und y festgestellt werden, so eignet sich dafür die Kovarianz. An dieser Stelle soll nur die Schätzung der Stichproben - Kovarianz dargestellt werden. Die Kovarianz allgemein finden Sie im Stochastik Teil dieses Skriptums.

$$Cov_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Durch den Verschiebungssatz ergibt sich eine zweite, bei der händischen Berechnung oftmals einfachere Formel.

$$Cov_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n\bar{x}\bar{y}$$

Variationskoeffizient

Die bisher dargestellten Streuungsmaße haben bezüglich Ihrer Vergleichbarkeit den Nachteil, dass im Allgemeinen keine Aussage darüber getroffen werden kann, ob die Varianz groß oder klein ist. Eine Standardabweichung von σ = 2 mm hat sicherlich eine andere Bedeutung bei einem 1000 mm Werkstück als bei einem 10 mm Nagel. Eine Lösung für dieses Problem bietet der sog. Variationskoeffizient.

Variationskoeffizient der Grundgesamtheit	Variationskoeffizient der Stichprobe
$C = \frac{\sigma}{\mu}$	$c = \frac{s}{\bar{x}}$

Der Variationskoeffizient ist somit definiert als die relative Standardabweichung bezogen auf den Mittelwert. Dieser Koeffizient ist einheitslos und somit für den Vergleich der Streuung verschiedener Stichproben geeignet. Es ist nicht möglich diese Kenngröße zu berechnen, falls der Mittelwert 0 ist. Allerdings bietet dieses Maß eine sehr einfache Möglichkeit die Streuung bei unterschiedlichen Mittelwerten zu vergleichen. Um eine grobe Einteilung über das Ausmaß der Schwankung zu treffen, hat sich folgendes Schema bewährt.

Geringe Schwankung	$0 \leq c < 3/4$
Mittlere Schwankung	$3/4 \leq c \leq 4/3$
Starke Schwankung	$c > 4/3$

Beispiel 1.1

Folgende Daten aus einer Stichprobe sind gegeben. {10; 5; 12; 13; 10; 14; 13; 11; 13; 15; 14; 11; 15;}. Berechnen Sie Mittelwert, Median, Modus, Standardabweichung, Spannweite, Varianz und Variationskoeffizienten.

Beispiel 1.2

Folgende Daten aus einer Stichprobe sind gegeben. {51,7; 51,9; 52,6; 52,3; 51,8; 52,6;}. Berechnen Sie Mittelwert, Median, Modus, Standardabweichung, Spannweite, Varianz und Variationskoeffizient.

Beispiel 1.3

Folgende Daten aus einer Stichprobe sind gegeben. {6; 53; 5; 103; 5; 4;}. Berechnen Sie Mittelwert, Median, Modus, Standardabweichung, Spannweite, Varianz und Variationskoeffizient. Was ist bei diesem Beispiel anders? Überlegen Sie sich, ob solche Werte auch wirklich vorkommen können? (Hinweis: Dienstleistung)

1.3 Lösungen Statistik

Beispiel 1.1

$\bar{x}$	s	s^2	Spannweite	Median	Modus	c
12,00	2,71	7,33	10,00	13,00	13,00	0,23

Beispiel 1.2

$\bar{x}$	s	s^2	Spannweite	Median	Modus	c
52,15	0,40	0,16	0,90	52,10	52,60	0,01

Beispiel 1.3

$\bar{x}$	s	s2	Spannweite	Median	Modus	c
29,33	40,88	1671,47	99,00	5,50	5,00	1,39

2 Wahrscheinlichkeitstheorie[2]

2.1 Grundlagen

Ereignisse

Die möglichen, sich jedoch gegenseitig ausschließenden Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißen Elementarereignisse (ω). Die Menge aller Elementarereignisse heißt Ereignismenge (Ω).

Häufigkeit

Von einem bestimmten Zufallsexperiment werden n Ausführungen gemacht. Tritt dabei ein bestimmtes Ereignis A dieses Experiments h_n –mal ein, so nennt man $h_n(A)$ die absolute Häufigkeit des Ereignisses. Setzt man die Häufigkeit in Relation zur Anzahl der Ausführungen, so wird dieses Verhältnis relative Häufigkeit des Ereignisses $f_n(A)$ genannt.

$$f_n(A) = \frac{h_n(A)}{n}$$

Beispiel 2.1

Ein Würfel wird 30-mal geworfen. Eine bestimmte Augenzahl (Ereignis) soll dabei x-mal auftreten. Daher gilt

$$h_n(A) = x \quad und \quad f_n(A) = \frac{x}{30}$$

Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit ist ein Maß zur Quantifizierung der Sicherheit bzw. Unsicherheit des Eintretens eines bestimmten Ereignisses A im Rahmen eines Zufallexperiments.

Es existieren unterschiedliche Ansätze zur Definition der Wahrscheinlichkeit:

(1) *Klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition*: Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Zufallsexperiment das Ereignis A eintritt:

$$\text{P(A)} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}$$

Diese Definition unterstellt gleichmögliche Ereignisse und daher ist ihre praktische Bedeutung gering.

[2] Bleymüller, Gehlert, Gülicher (2000): Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, 12. Auflage, Verlag Vahlen, München

(2) *Statistische Wahrscheinlichkeitsdefinition*: Bei dieser Definition geht man von einem Zufallsexperiment aus, welches aus unendlich vielen unabhängigen Versuchen besteht.
Die Wahrscheinlichkeit P(A) wird in diesem Fall als Grenzwert der relativen Häufigkeit von A definiert: $P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A)$

(3) *Subjektive Wahrscheinlichkeiten*: Die Wahrscheinlichkeit P(A) eines Ereignisses A ist eine in Zahlen wiedergegebene „Chance“, dass dieses Ereignis eintreten wird.

Unabhängig von der Definition, haben Wahrscheinlichkeiten folgende Eigenschaften:

- Abgeschlossenes Intervall $0 \leq P(A) \leq 1$
- Ein sicheres Ereignis bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereigniseintritts P(A) = 1 ist.
- Ein unmögliches Ereignis bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereigniseintritts P(A) = 0 ist.
- Sind A und B Komplementärereignisse (entweder/oder) so ist P(A) + P(B) = 1
- Wenn $A \cap B = \emptyset$ dann ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Additionssatz)

$\subseteq$	Teilmenge	Menge, die ganz in einer anderen enthalten ist
$A \cap B$	Durchschnitt	alle Elemente, die in A und B enthalten sind $A \cap B = \{x \,/\, (x \in A) \text{ und } (x \in B)\}$
$A \cup B$	Vereinigung	alle Elemente, die in A und/oder B enthalten sind $A \cup B = \{x \,/\, (x \in A) \text{ oder } (x \in B)\}$
A \ B	Differenzmenge	alle Elemente von A, die nicht in B enthalten sind A \ B = {x / (x ∈ A) und (x Ï B)}

Die Basis für Wahrscheinlichkeit bildet das Gesetz der Großen Zahlen (Law of Large Numbers LLN). Bei genügend vielen Wiederholungen konvergiert die relative Häufigkeit $f_n(A)$ gegen P(A). Daher ist P (A) die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.
Das Problem der Festlegung der Wahrscheinlichkeit wird in der Praxis oft folgendermaßen gelöst: $P(A) \approx f_n(A)$, wobei n eine genügend große Anzahl an durchgeführten Einzelversuchen einer Versuchsreihe darstellt.

Beispiel 2.2
Die Ereignisse A und B haben folgende Wahrscheinlichkeit P(A) = 0,5 und P(B) = 0,8. Wenn $P(A \cap B) = 0{,}3$ ist, wie groß ist dann $P(A \cup B)$?

Lösung Beispiel 2.2

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0{,}5 + 0{,}8 - 0{,}3 = 1$

Beispiel 2.3

Die Ereignisse A und B haben folgende Wahrscheinlichkeit P(A) = 0,5 und P(B') = 0,2. (Anmerkung: P(B') ist die Gegenwahrscheinlichkeit 1- P(B)). Wenn $P(A \cup B) = 1$ ist, wie groß ist dann $P(A \cap B)$?

Lösung Beispiel 2.3

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$= P(A) + 1 - P(B') - P(A \cup B)$

$= 0{,}5 + 1 - 0{,}2 - 1 = 0{,}3$

Beispiel 2.4

Eine Münze wird 2 mal geworfen. Nehmen Sie an, dass jedes Ereignis (Kopf oder Zahl) die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt (perfekte Münze). Finden Sie die Wahrscheinlichkeiten

A = mindestens 1 mal Zahl
B = beide Würfe Zahl
C = der letzte Wurf ist Zahl
Und A', $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$.

Lösung Beispiel 2.4

$\Omega = \{ZZ, ZK, KZ, KK\}$. Da alle Ereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit aufweisen, haben alle Wahrscheinlichkeit 1/4

$A = \{ ZZ, ZK, KZ \}$, $P(A) = 3/4$

$B = \{ ZZ \}$, $P(B) = 1/4$

$C = \{ZZ, KZ\}$, $P(C) = 1/2$

$P(A') = 1 - P(A) = 1/4$

$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = \{ZZ\} = B \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) = 1/4$

$B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = \{ZZ, ZK, KZ\} = A \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) = 3/4$

$A \cap C = \{ZZ, KZ\} = P(C) \Rightarrow P(A \cap C) = 1/2$

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 3/4 + 1/2 - 1/2 = 3/4$ oder

$(A \cup C) = \{ZZ, KZ, ZK\} = A \Rightarrow P(A \cup C) = 3/4$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit sagt aus, wie wahrscheinlich es ist, dass ein Ereignis A eintritt, unter der Bedingung, dass B eingetreten ist.

- Bedingte relative Häufigkeit A unter Bedingung B: $f_n(A|B) = \frac{f_n(A \cap B)}{f_n(B)}$
- Bedingte relative Wahrscheinlichkeit A unter Bedingung B: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, wobei
- P(A $\cap$ B) = P(A|B) P(B) = P(B|A) P(A) (Produktformel oder Multiplikationssatz) gilt.

- Zwei Ereignisse sind unabhängig, wenn sie sich gegenseitig nicht beeinflussen:
$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Beispiel 2.5

In einer Schale liegen 3 Kugeln, die mit 1 bis 3 beschriftet sind. Das Zufallsexperiment besteht aus dem zweimaligen Ziehen einer Kugel mit Zurücklegen. Finden Sie die Wahrscheinlichkeit von

A = Die erste Kugel ist eine ungerade Zahl

B = Die zweite Kugel ist eine gerade Zahl

Und A $\cap$ B

Zeigen Sie außerdem, dass A und B unabhängig sind.

Lösung Beispiel 2.5

Ω = {(11),(12),(13),(21),(22),(23),(31),(32),(33)}.

A = {(11),(12),(13) ,(31),(32),(33)}; P(A) = 6/9

B = {(12),(22),(32)}; P(B) = 3/9

(A $\cap$ B) = {(12),(32)} $\Rightarrow$ P(A $\cap$ B) = 2/9

Anwenden des Multiplikationssatzes zeigt, dass A und B voneinander unabhängig sind

P(A $\cap$ B) = P(A) * P(B) = 3/9 * 6/9 = 18/81 = 2/9

Zufallsgröße (Zufallsvariable)

Eine Funktion X, die jedem Elementarereignis ω der Ergebnismenge Ω eine reelle Zahl zuordnet, heißt Zufallsgröße X.

$$X : \Omega \to R \quad mit \quad X(\omega) = x$$

Durch eine Zufallsgröße lässt sich ein Elementarereignis als Zahl darstellen, wobei die Zuordnung nicht willkürlich geschieht, sondern durch die Aufgabenstellung gegeben ist.

(X = x) bezeichnet ein bestimmtes Ereignis.

$(X \leq x)$ gibt alle Ereignisse an, bei denen die Werte einer Zufallsgröße kleiner oder gleich der reellen Zahl x sind.
$(X > x)$ gibt alle Ereignisse an, bei denen die Werte einer Zufallsgröße größer der reellen Zahl x sind.
Die Zufallsgröße heißt diskret, wenn sie nur endlich viele Realisationen besitzt. Füllen die Realisationen ein Intervall der reellen Zahlengeraden kontinuierlich aus, so heißt die Zufallsvariable stetig.

2.2 Verteilungsfunktionen

Es sei X eine Zufallsvariable mit $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Dann ist die für alle $x \in R$ definierte Funktion F mit $F(X) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$ die Verteilungsfunktion von X.

Dabei wird die Zufallsvariable vollständig durch ihre Verteilungsfunktion F(X) beschrieben. Die Wahrscheinlichkeit $P(a < X \leq b)$ dafür, dass die Zufallsvariable X einen Wert zwischen a und einschließlich b annimmt, lässt sich mit Hilfe der Verteilungsfunktion F(X) folgendermaßen berechnen.
$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

Diskrete Verteilungsfunktion
Eine Zufallsvariable heißt diskret, wenn ihre Ausprägungen nur endliche oder zählbar viele Werte in R annehmen kann. Trägt man die Eintrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Ausprägungen der Zufallsvariable in ein Diagramm ein, erhält man die graphische Darstellung Wahrscheinlichkeitsfunktion f(x).
Die zugehörige Verteilungsfunktion F(X) zeigt die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten an.
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Stetige Verteilungsfunktion
Eine Verteilungsfunktion heißt stetige Verteilungsfunktion, wenn die Verteilungsfunktion eine Stammfunktion einer Funktion mit der Form $F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ ist.

Dabei wird f(t) „Dichte“ der Verteilung genannt. Die Verteilungsfunktion repräsentiert somit ein Aufsummieren von Teilwahrscheinlichkeiten.

Für die Verteilungsfunktion gilt Folgendes:

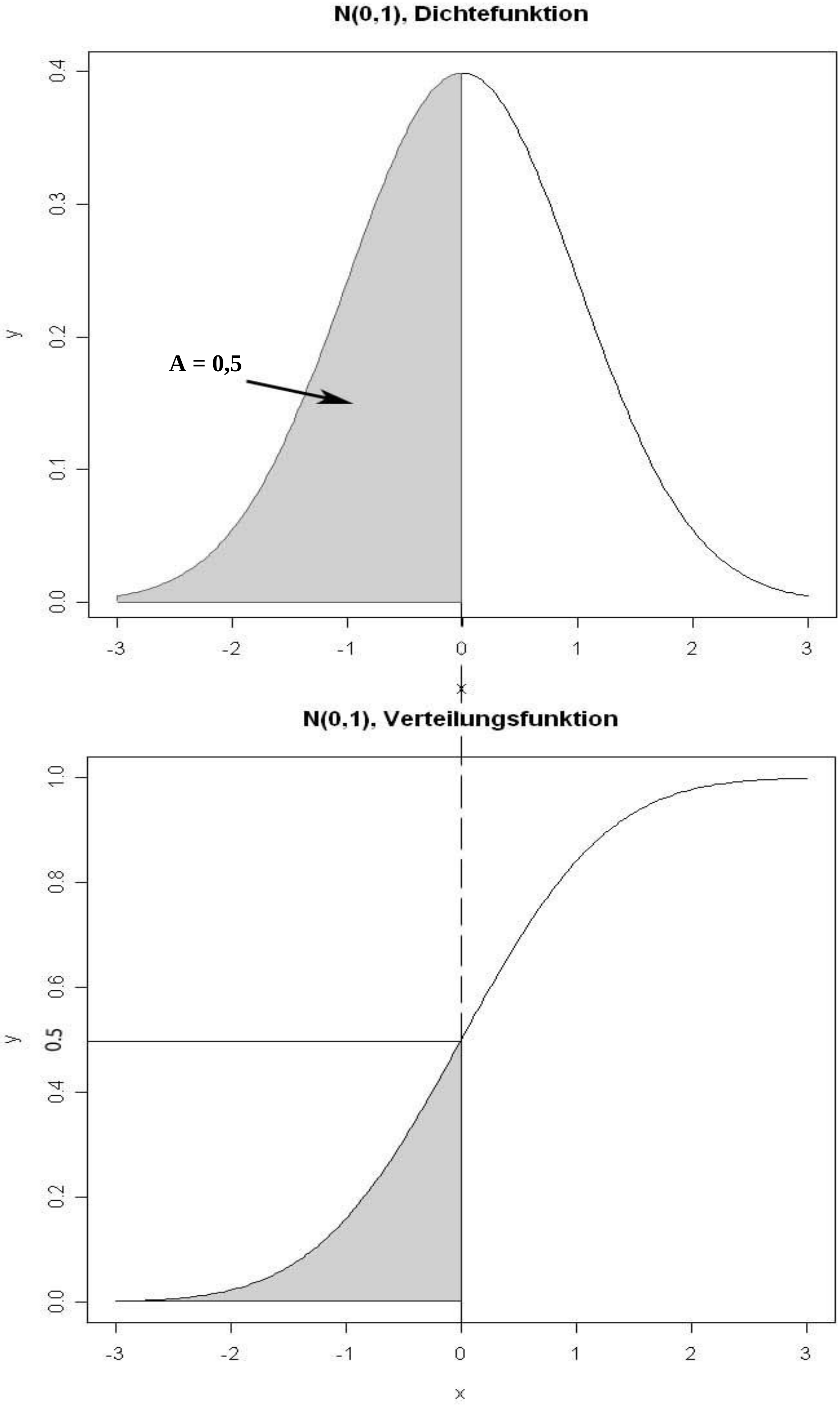
- $f(x) \geq 0$
- $f(x)$ ist normiert, d.h. die Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion besitzt immer den Inhalt 1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $0 \leq F(X) \leq 1$
- Wenn die Verteilungsfunktion F differenzierbar ist, ist ihre Ableitung die Dichtefunktion der Verteilungsfunktion. $F'(x) = f(x)$
- $P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$
- Das Eintreten eines Ereignisses der Form P(X = c), sogenannte Punktwahrscheinlichkeit, ist Null, da $\int_c^c f(x)\,dx = F(c) - F(c) = 0$

Im Folgenden soll anhand der Standardnormalverteilung der Zusammenhang zwischen Dichte- und Verteilungsfunktion graphisch dargestellt werden. Man erkennt, dass der Flächeninhalt unter der Dichtefunktion 0,5 beträgt, da

$$F(X \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} = 0{,}5$$

(siehe Kapitel 2.5.4)

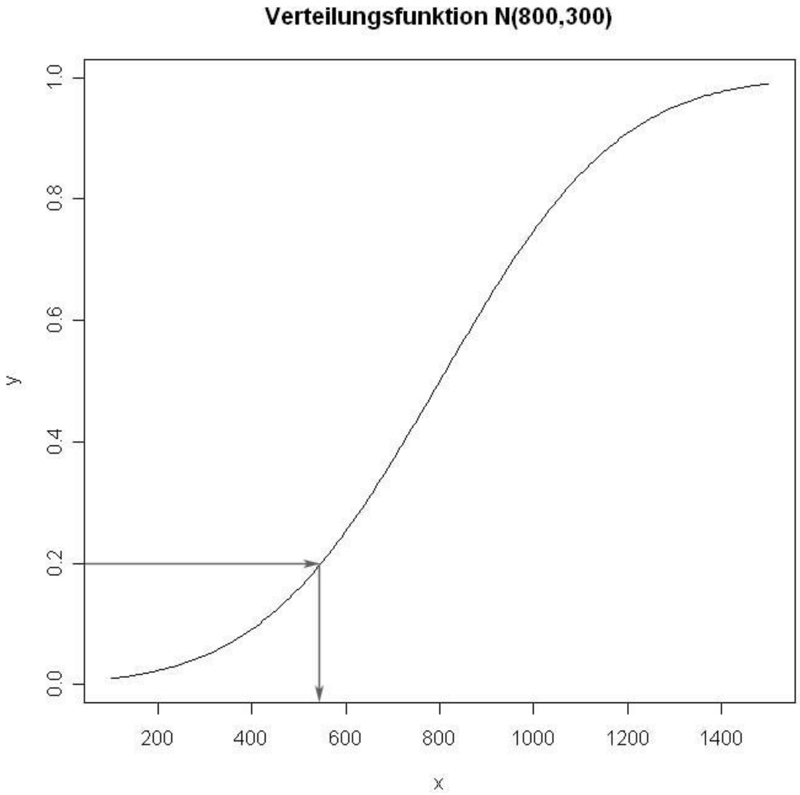
In der Verteilungsfunktion erkennt man, dass sich bei einem Wert von x=0 ein Funktionswert von 0,5 ergibt.


N(0,1), Dichtefunktion
A = 0,5
y
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
N(0,1), Verteilungsfunktion
y
0.0
0.2
0.4
0.5
0.6
0.8
1.0
-3
-2
-1
0
1
2
3
x

Ebenso wäre es auch möglich, den umgekehrten Weg zu wählen und über die Inverse Verteilungsfunktion auf Werte rückzuschließen, beispielsweise interessiert häufig die Fragestellung, welche x-Werte eine Zufallsvariable maximal aufweisen darf, wenn man lediglich die unteren p Prozent aller möglichen Werte der Zufallsvariable betrachtet.

Beispiel (fiktiv):

Das Einkommen von Sommerjobs für Studenten ist normalverteilt mit Erwartungswert 800€ und Standardabweichung 300€. Ab welchem Einkommen zählt man zu den 20% am schlechtesten verdienenden Studenten? (547,5€)



2.3 Verteilungsparameter

Erwartungswert

Sei X eine Zufallsvariable mit $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ und die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten sind gegeben, dann ist der Erwartungswert folgendermaßen definiert.

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + ... + x_n P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Eigenschaften des Erwartungswertes sind:

$$\mathbf{E}(1) = 1$$
$$\mathbf{E}(\lambda X) = \lambda \mathbf{E}(X)$$
$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$$
$$X \leq Y \Rightarrow \mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$$

Beispiel 2.6

Die diskrete Zufallsgröße X mit der Verteilungstabelle

x_i	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$	0,1	0,15	0,2	0,3	0,2	0,05

besitzt den Erwartungswert **E**(X) = 0,3 + 0,6 + 1,0 + 1,8 + 1,4 + 0,4 = 5,5.

Für die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 6)$ ergibt sich: $P(X \geq 6) = 0,3 + 0,2 + 0,05 = 0,55$

Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariable

Unter dem Erwartungswert E(X) einer stetigen Zufallsvariablen X mit der Dichtefunktion f(x) versteht man

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$

Beispiel 2.7

Berechnen Sie E(X) wenn X~ U(a,b) → (X ist gleichverteilt mit Untergrenze a und Obergrenze b, siehe Kapitel 2.5.6)

$$E(X) = \int_a^b x\, f(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b$$
$$= \left(\frac{1}{b-a}\frac{b^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{b-a}\frac{a^2}{2}\right) = \frac{(b-a)(a+b)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Varianz

Die Varianz einer Zufallsgröße ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen Z = $[X - E(X)]^2$, durch die die mittlere quadratische Abweichung von Erwartungswert E(X) beschrieben wird.

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}([X - \mathbf{E}(X)]^2) \text{ oder in einer vereinfachten Form } V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Eigenschaften der Varianz sind

$$\left.\begin{array}{l} Var(X+a) = Var(X) \\ Var(aX) = a^2 Var(X) \end{array}\right\} a \in R$$

Beispiel 2.8

Zeigen Sie, dass diese Vereinfachung $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ richtig ist. Hinweis: Verwenden Sie $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und die Eigenschaften des Erwartungswertes.

Kovarianz und Korrelation

Im Statistikteil wurde bereits die Stichprobenkovarianz erwähnt. An dieser Stelle wird nun die allgemeine Definition vorgestellt.

Bei zwei Zufallsvariablen beschreibt die Kovarianz das Verhältnis der beiden Zufallsvariablen zueinander. Aus der Definition erkennt man, dass es sich um eine Verallgemeinerung der Varianz handelt (Cov(X,X) = Var(X))

Für zwei Zufallsvariablen X und Y ist die **Kovarianz** Cov(X, Y) definiert durch

$$Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Der Quotient

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

heißt der **Korrelationskoeffizient** der Zufallsvariablen X und Y.

Gilt Cov(X, Y) = 0, also $\rho_{X,Y} = 0$, so heißen die beiden Zufallsvariablen unkorreliert. Sind X und Y unabhängig, dann sind sie folglich unkorreliert. Die Korrelation besitzt gegenüber der Kovarianz den Vorteil, dass sie zwischen –1 und 1 liegt und man daher aussagen über den Grad der Korrelation treffen kann.

Aufgrund ihrer Definition spricht eine positive Korrelation dafür, dass bei großen X-Werten eher große Y-Werte auftreten werden und bei kleinen X-Werte eher kleine Y-Werte. Eine stark negative Korrelation deutet darauf hin, dass zu großen X-Werten tendenziell kleine Y-Werte gehören und bei kleinen X-Werten tendenziell große Y-Werte zu erwarten sind.

Anmerkung
Der Korrelationskoeffizient macht Aussagen über den Grad des Pooling-Effekts möglich (siehe Punkt 1.3 Anwendungsbeispiel Pooling-Effekt)!

	Korrelationskoeffizient		
	-1	0	1
Effektivität Pooling	Größtmöglicher Pooling-Effekt	Durchschnittlicher Pooling-Effekt	Kein Pooling-Effekt

<u>Summen von Zufallsvariablen</u>
Im Statistikteil wurde bereits gezeigt, dass bei zwei Zufallszahlen X und Y, welche unabhängig und damit unkorreliert sind, die Varianzen addiert werden können. Außerdem besagt eine Rechenregel von Erwartungswerten, dass Erwartungswerte addiert werden können (siehe Erwartungswert). Zusammengefasst ergibt sich folgendes:
Für die Varianz einer Summe von zwei Zufallsvariablen X, Y gilt:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

Sind X und Y unkorrelierte Zufallsvariablen, d.h. ist Cov(X, Y) = 0, so folgt

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Die Summe des Erwartungswerts zweier Zufallsvariablen ist

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Anmerkung
Sind zwei Zufallsvariablen unabhängig, so gilt E(XY)=E(X)E(Y)

Beispiel 2.9 (siehe Summen von Zufallsvariablen)
Zeigen Sie, dass $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$ gilt. Verwenden Sie wieder $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und die Eigenschaften des Erwartungswertes

Beispiel 2.10
Für die Erwartungswerte der Zufallsvariablen X und Y gilt E(X) = 2 und E(Y) = 4. Wie groß ist der Erwartungswert der Summe von X und Y?

Beispiel 2.11
Für die Varianzen der beiden unkorrelierten Zufallsvariablen X und Y gilt V(X) = 44 und V(Y) = 36.
a) Wie groß ist die Varianz der Summe der beiden Zufallsvariablen?
b) Angenommen, die Zufallsvariablen wären negativ korreliert. Ist Var(X + Y) dann größer, kleiner oder gleich der Varianz der unkorrelierten Zufallsvariablen? Warum?

Quantil
Ein Quantil ist jener Wert, unterhalb dessen x % der Datenpunkte liegen. Daher muss immer der Anteil bzw. der Prozentsatz angegeben werden, auf den sich der Wert bezieht.
Das 50%- Quantil wurde bereits vorgestellt- es handelt sich dabei um den Median. Weitere sehr häufige Quantile sind das 25% und das 75% Quantil.

2.3.1 Anwendungsbeispiel: Der Pooling-Effekt

Im bisher Dargestellten wurde von Einzelbetrachtungen ausgegangen, in denen die Ausprägungen eines Merkmals durch den Mittelwert μ, die Standardabweichung σ und die Varianz σ² beschrieben werden.
Der Pooling-Effekt beschreibt die Verringerung des Variationskoeffizienten um $\frac{1}{\sqrt{n}}$ wenn nun mehrere Merkmale mit denselben Mittelwerten und Standardabweichungen gebündelt betrachtet werden.

Für die Betrachtung von n-Merkmalen gilt:

	Einzelbetrachtung	n-Merkmale gebündelt
Mittelwert	$\mu 0$	$n \times \mu 0$
Varianz	$\sigma 0^2$	$n \times \sigma 0^2$
Standardabweichung	$\sigma 0$	$\sqrt{n} \times \sigma 0$
Variations-koeffizient	$C = \frac{\sigma}{\mu}$	$C = \frac{\sqrt{n} \times \sigma}{n \times \mu} = \frac{\sigma}{\sqrt{n} \times \mu}$

Der Variationskoeffizient der gebündelten Betrachtung von n Merkmalen entspricht $\frac{1}{\sqrt{n}}$ mal dem Variationskoeffizienten der Einzelbetrachtung.

Beispiel 2.12
Eine Maschine des Typs mRC2012 produziert Schrauben. Durchschnittlich benötigt sie dafür 2 min pro Schraube bei einer Standardabweichung von 0,01 min. Welcher Variationskoeffizient würde sich ergeben, könnte man den gemeinsamen Output von 4 Maschinen dieses Types betrachten?

Beispiel 2.13
Zwei Produktionsstraßen in einem Betrieb produzieren das Produkt A. An beiden gibt es eine Endkontrolle, die feststellt, dass der Mittelwert der Produktionszeit bei $\mu = 75$ min liegt und eine Standardabweichung von $\sigma = 50$ min vorliegt. Mit welcher Standardabweichung müsste die Schichtleitung rechnen, wenn lediglich eine, gemeinsame Endkontrolle erfolgt?

Beispiel 2.14
Folgende Absatzzahlen werden für das vergangene Quartal von der Marketing-Abteilung an die Geschäftsleitung übermittelt:

Monat	April	Mai	Juni
Produkt A	12.000 Stück	12.500 Stück	10.000 Stück
Produkt B	10.000 Stück	12.500 Stück	12.000 Stück

Für das kommende Quartal denkt die Geschäftsleitung darüber nach die Produkte A und B durch ein neues Produkt C zu ersetzen. Wenn davon ausgegangen werden kann, dass wirklich die komplette Nachfrage nach A und B durch das neue Produkt C erfüllt werden kann und die Nachfrage von Juli/August/September derjenigen von April/Mai/Juni entspricht – um wieviel verringert sich dann die Standardabweichung im kommenden Quartal im Vergleich zur gekoppelten unkorrelierten Standardabweichung der beiden Produkte?

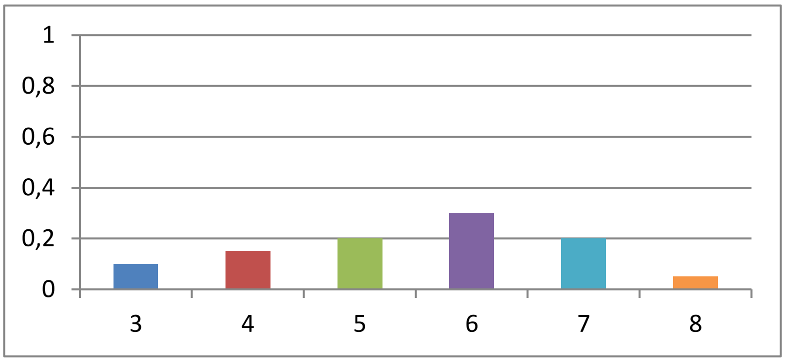
2.4 Zusammenhang Wahrscheinlichkeitsfunktion – Verteilungsfunktion

In Weiterführung von Beispiel 2.6 soll in diesem Kapitel noch einmal versucht werden, den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion anhand einer diskreten Zufallsvariable deutlich zu machen.

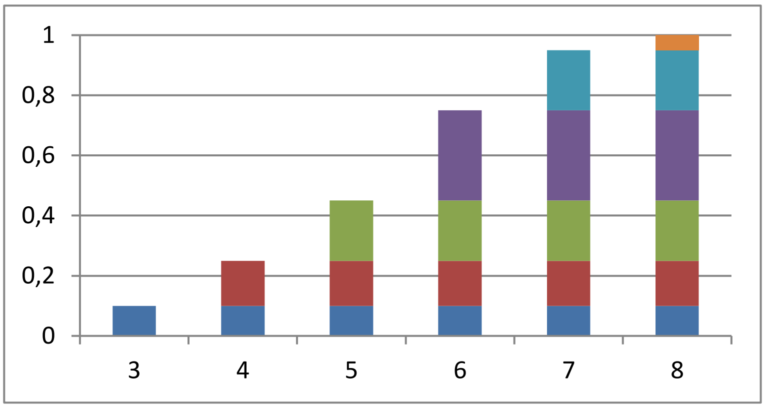
Beispiel 2.6 (Fortsetzung)
Die diskrete Zufallsvariable X tritt in folgenden Ausprägungen mit den gegebenen Wahrscheinlichkeiten auf:

x_i	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$	0,1	0,15	0,2	0,3	0,2	0,05

Trägt man diese Eintrittswahrscheinlichkeiten in ein geeignetes Diagramm ein, so erhält man die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsvariable X. Zur besseren Veranschaulichung wurde die Skala genormt.



Die Verteilungsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass das Eintreten eines Ereignisses kleiner bzw. gleich einer vorgegebenen Grenze ist, also P(X<=x). Zum Beispiel soll die Wahrscheinlichkeit, dass das eintretende Ereignis kleiner oder gleich 5 ist, berechnet werden. Daraus folgt, dass als mögliche Ausprägungen die Ereignisse (3), (4) oder (5) für diese Berechnung in Frage kommen. Die Summe der Eintrittswahrscheinlichkeiten ergibt die gesuchte Wahrscheinlichkeit: P(X<=5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0,45.



2.5 Spezielle Verteilungen (einige Beispiele)

2.5.1 Binomialverteilung (diskret) ~ B(n,p)

Zufallsexperimente mit nur zwei verschiedenen Ausgängen führen zur Binomialverteilung. Bei derartigen Experimenten tritt ein Ereignis A bei jeder Durchführung des Experiments mit der Wahrscheinlichkeit p und das komplementäre Ereignis $\overline{A}$ mit der (Gegen) Wahrscheinlichkeit q = 1 - p ein. Experimente, bei denen nur zwei verschiedene und sich gegenseitig ausschließende Ereignisse mit konstanten Ereignissen auftreten können, heißen Bernoulli-Experimente.

Eine Folge von unabhängigen Bernoulli- Experimenten geben p die Trefferwahrscheinlichkeit und n die Anzahl an Experimenten an.

Beispiel: Das fünfmalige Werfen einer Münze hat die Parameter p = 0,5, q = 0,5 und n = 5.

Wahrscheinlichkeitsfunktion : $f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, x = 0,1,2,…n

Verteilungsfunktion: $F(x) = P(X \le x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, x /0

Erwartungswert: $E(X) = np$

Varianz: $Var(X) = np(1-p)$

Lösen des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, n, k /0

Rechenregeln: $\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n} = 1$

Beispiel 2.15

In einer Urne befinden sich vier rote und sechs schwarze Kugeln. Es werden 10 Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 6 rote unter den 10 Kugeln sind.

Daher ist p = 4/10 = 0,4 und q = 0,6 und $P(X = 6) = f(6) = \binom{10}{6} \cdot 0{,}4^6 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}1115$

Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 6 rote Kugeln unter den gezogenen sind, ist

$P(X \le 6) = f(0) + f(1) + ... + f(6) = 0{,}9452$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 6 rote Kugeln unter den gezogenen sind, ist

$P(X \ge 6) = 1 - P(X \le 5) = 1 - [f(0) + f(1) + ... + f(5)] = 1 - 0{,}8338 = 0{,}1662$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei, aber nicht mehr als sieben rote Kugeln unter den entnommenen sind, ist

$P(3 \le X \le 7) = P(X \le 7) - P(X \le 2) = 0{,}9877 - 0{,}1673 = 0{,}8204$

Beispiel 2.16

In einer Urne befinden sich 2 rote und 3 schwarze Kugeln. Es werden 5 Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

a) höchstens 1 schwarze Kugel unter den gezogenen ist

b) genau 3 rote unter den 5 Kugeln sind

c) mindestens 4 schwarze Kugeln unter den gezogenen sind

d) mindestens 2, aber nicht mehr als 4 schwarze Kugeln unter den entnommenen sind

e) genau 2 schwarze unter den 5 Kugeln sind

f) höchstens 2 rote Kugeln unter den gezogenen sind

g) mindestens 2, aber nicht mehr als 3 rote Kugeln unter den entnommenen sind

h) mindestens 3 rote Kugeln unter den gezogenen sind

Beispiel 2.17

Langjährige demoskopische Untersuchungen haben ergeben, dass die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchen p = 0,514 beträgt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich in einer Familie mit drei Kindern kein Mädchen?

Beispiel 2.18

Ein Betrieb fertigt Kugeln für Kugellager; 5% der Kugeln gehören nicht zur Qualitätsstufe „Q“. Die hergestellten Kugeln werden zu je 100 Stück abgepackt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit q sind in einer Packung höchstens zwei Kugeln, die nicht zur Güteklasse „Q“ gehören?

2.5.2 Poissonverteilung (diskret) ~ P(λ)

Für kleine Werte von p und sehr große n (n → ∞) geht die Binomialverteilung in die Poissonverteilung über. Das bedeutet, dass Ereignisse, die „relativ selten“, d.h. mit geringer Wahrscheinlichkeit auftreten, einer Poissonverteilung genügen:

Wahrscheinlichkeitsfunktion : $f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

Verteilungsfunktion: $F(x) = P(X \le x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \lambda > 0$

Erwartungswert: $E(X) = \lambda = np$

Varianz: $Var(X) = E(X) = \lambda = np$

Anmerkung

Die Poissonverteilung lässt sich aus der Binomialverteilung durch den Grenzübergang $n \to \infty$ und p → 0 herleiten. D.h. Die Binomialverteilung darf für großes n und kleines p durch die bequemere Poissonverteilung mit dem Parameter λ = np ersetzt werden. Eine gängige Faustregel besagt, wenn np<10 und n>1500p, kann zur Poissonverteilung übergegangen werden.

Beispiel 2.19

Nehmen Sie an, dass eine seltene Krankheit 1 von 10 000 Menschen befällt. Finden Sie die Auftrittswahrscheinlichkeit von 5 Fällen in einer Population von 100 000 Menschen.

Beispiel 2.20

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Qualitätskontrolle vier Defekte an einem Produkt gefunden werden ist 0,0175. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis bei 100 Kontrollen mindestens einmal eintritt?

Anmerkung: Hier gilt es die Formulierung genau zu beachten.

Beispiel 2.21

Die Anzahl X der Maschinenausfälle in einer Fertigungsabteilung im Verlaufe einer Schicht von 8 Stunden genügt einer Poisson-Verteilung von λ =5 (Ausfällen).

a)Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für X = i , i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15 und zeichnen Sie ein Verteilungsdiagramm.

b)Berechnen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine höchstens 3, 7, und 10 mal ausfällt und mindestens 2, 6 und 13 mal ausfällt

Beispiel 2.22

In einem Lager folgt die Wahrscheinlichkeit einen Anruf zu erhalten der Poissonverteilung mit λ =2 **pro Stunde**. (X ist die Anzahl an Anrufen)

Wenn der (einzige) Lagerarbeiter 10 Minuten pro Stunde Pause macht, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Telefon zu dieser Zeit läutet? (λ muss auf die 10 min angepaßt werden)

2.5.3 Diskrete Gleichverteilung ~ U(n)

Tritt jedes Ereignis einer diskreten Zufallsvariable mit der gleichen Wahrscheinlichkeit im Intervall i bis j auf, so handelt es sich um eine diskrete Gleichverteilung. Als Beispiel sei das Werfen eines idealen Würfels genannt, bei dem das Eintreten der sechs möglichen Ausprägungen (1,2,…6) gleich wahrscheinlich ist (i = 1; j = 6).

Wahrscheinlichkeitsfunktion: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{j-i+1} & x = (i, i+1, \dots, j) \\ 0 & \end{cases}$

Verteilungsfunktion: $F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & falls\ x < i \\ \frac{x-i+1}{j-i+1} & falls\ i \leq x < j \\ 1 & falls\ x \geq j \end{cases}$

Erwartungswert: $E(X) = \frac{i+j}{2}$

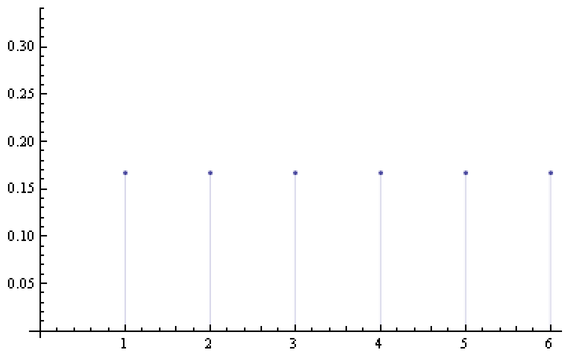
Varianz: $Var(X) = \frac{(j-i+1)^2-1}{12}$

Weiterführung des Beispiels: Ein idealer Würfel wird einmal geworfen, X = „Augenzahl“

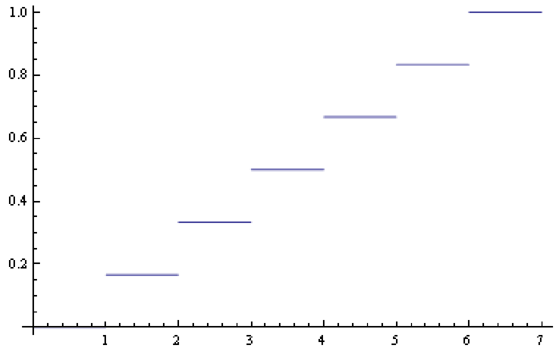
Wertebereich $\Omega = (1,2,3,4,5,6)$

Wahrscheinlichkeit $f(x_i) = \frac{1}{6}$ für $i = 1,2,\dots 6$

Wahrscheinlichkeitsfunktion



Verteilungsfunktion



Erwartungswert: $E(X) = \frac{6+1}{2} = 3{,}5$

Varianz: $Var(X) = \frac{6^2-1}{12} = 2{,}916$

2.5.4 Normalverteilung (stetig) ~ N(μ, σ²)

Die Normalverteilung ist eine stetige Verteilung. Die Fläche unter der Dichtekurve beschreibt die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes stetiges Merkmal x_i innerhalb einer untersuchten Stichprobe mit n Elementen anzutreffen. Die gesamte Fläche repräsentiert 100% und ist daher 1. Den Erwartungswert oder Mittelwert μ und die Standardabweichung σ der Verteilung kennt man entweder, oder man kann beide Werte mit den uns bekannten statistischen Mitteln berechnen. Im Folgenden die Eigenschaften der Normalverteilung:

Dichtefunktion: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Verteilungsfunktion: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$, $\mu,\sigma > 0$

Erwartungswert: $E(X) = \mu$

Varianz: $Var(X) = \sigma^2$

Die Standardabweichung σ bestimmt die „Höhe“ (Maximum) und „Breite“ von f(x). Je kleiner σ, desto höher liegt das Maximum und desto steiler fällt die Kurve ab. μ legt die Lage des Maximums fest (Symmetriezentrum).

Für die spezielle Normalverteilung mit μ = 0 und σ =1, die man **Standardnormalverteilung** nennt, existieren genaue Tabellenwerke. Daher transformiert man alle anderen Normalverteilungen auf diese standardisierte Form.
Jede Normalverteilung kann durch eine lineare Transformation in eine Standardnormalverteilung überführt werden. Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph der Funktion längs der x-Achse verschoben wird. Diesen Vorgang nennt man Standardisieren der Zufallsgröße X.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}, \ Z \sim N(0,1)$$

Für das Rechnen mit der Standardnormalverteilung gilt folgendes:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Größe kleiner oder gleich x sei, erhält man durch $P(X \leq x) = F(z)$. Die Werte von F(z) können in der Standardnormalverteilungstabelle (siehe Anhang) nachgesehen werden. Sie entsprechen dem Flächenintegral von $-\infty$ bis z.
- Für die Wahrscheinlichkeit, dass X > x sein soll, muss man die Gegenwahrscheinlichkeit berechnen. $P(X > x) = 1 - F(z)$ oder bei manchen Tabellen als $F(-z)$ angegeben.
- Für die Wahrscheinlichkeit, dass x zwischen den Grenzen x_1 und x_2 liegt, gilt $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(z_2) - F(z_1)$. Diese Formel entspricht dem Flächenintegral zwischen 2 Grenzen.
- Sind die Grenzen x_1 und x_2 symmetrisch zum Mittelwert, dann vereinfacht sich die Formel, da $z_1 = -z_2$ ist und $F(-z) = 1 - F(z)$ bzw. $F(z) - F(-z) = 2F(z) - 1$

Anmerkung: Die Standardnormalverteilung besitzt folgende wesentliche Eigenschaften:

Dichtefunktion: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Verteilungsfunktion: $\phi(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

Die griechischen Buchstaben φ und Φ werden häufig gebraucht um den gesamten Term anzuschreiben, da das die Schreibweise erheblich vereinfacht.

Anmerkung: Für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei einer normalverteilten Zufallsvariable benötigt man immer das oben angeführte Integral der Verteilungsfunktion, welches im Allgemeinen nicht elementar zu lösen ist. Die Werte müssen daher mit numerischen Integrationsmethoden berechnet oder aus Tabellen entnommen werden. Liegen die Werte zwischen den in der Tabelle angegebenen Werten, so muss interpoliert werden.

Dass, die Normalverteilung so wichtig ist, liegt nicht zuletzt am **Zentralen Grenzwertsatz**. Dieser besagt, dass bei einer Stichprobenanzahl n>30, die Stichprobe annähernd normalverteilt ist, unabhängig der Form der Grundgesamtheit. Wir können bei großen n mit der Normalverteilung rechnen, ohne die wirkliche, zugrundeliegende Verteilung der Population zu kennen.
Da diese Verteilung so wichtig ist, werden an dieser Stelle noch zwei weitere Konzepte erläutert, die jedoch für alle Verteilungen gelten.

<u>Konfidenzintervall</u>
Ein Konfidenzintervall ist ein Unsicherheitsbereich für die Schätzung eines Parameters (zB. Mittelwert, Median) aus einer Stichprobe. Das Ergebnis einer solchen Schätzung ist abhängig von der gezogenen Stichprobe und weist damit eine Zufallsschwankung auf. Zur Berechnung eines Konfidenzintervalls muss man die gewünschte Überdeckungswahrscheinlichkeit spezifizieren (häufig 95%). Ein 95%-Konfidenzintervall zum Beispiel ist ein Bereich, der den theoretischen (unbekannten) Wert des interessierenden Parameters mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% beinhaltet. Aus dem Konfidenzintervall lassen sich Schlüsse bezüglich der statistischen Signifikanz ziehen.

Unterschiede bzw. Zusammenhänge werden dann als signifikant bezeichnet, wenn die Wahrscheinlichkeit ihres Zustandekommens gering ist. Dabei wird die maximal zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit als Signifikanzniveau α bezeichnet. Dieses wird im Vorhinein (a priori) festgelegt. Je geringer α, desto höher ist die Informationsqualität.

Häufige Intervalle sind dabei das 90, 95 und 99% -ige Konfidenzintervall, d.h. dass der Wert innerhalb eines bestimmten Intervalls mit 90, 95 und 99% -iger Sicherheit liegt. Die Konfidenzsicherheit wird dabei mit 1- α angegeben.

Beispiel 2.23
X sei eine (150; 484) normalverteilte Zufallsgröße. (Schreibweise: $X \sim N(150; 484)$)
Berechnen Sie $P(X \leq 190)$, $P(X \leq 102)$, $P(X \geq 130)$ und $P(177{,}5 \leq X \leq 192{,}9)$

Beispiel 2.24
$X \sim N(0,1)$. Finden Sie das 95% Quantil und das 45% Quantil.

Beispiel 2.25
Wir nehmen an, dass die Körpergröße von Studenten normalverteilt ist und für den Mittelwert μ = 178,6 cm und die Standardabweichung σ = 7,5 cm ermittelt wurden, dass eine Normalverteilung $N(178{,}6; 7{,}5^2)$ vorliegt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Student
a) kleiner als 172 cm
b) größer als 187 cm
c) zwischen 175 und 181 cm groß ist?

Beispiel 2.26
Es wurde festgestellt, dass die durchschnittliche Masse eines maschinell gefertigten Joghurts μ = 400 g beträgt. Als Standardabweichung wurde σ = 2 g ermittelt. Es ist jene Abweichung vom Mittelwert $\Delta\mu$ zu berechnen, innerhalb der 99% der produzierten Stück liegen?
(Hilfestellung: $P(400 - \Delta\mu < X < 400 + \Delta\mu)=0{,}99$)

Beispiel 2.27
Auf einer Metallhobelmaschine werden Platten hergestellt. Bei einer routinemäßigen Kontrolle der Qualität wurde die Dicke von 20 Platten gemessen, wobei folgende Ergebnisse (mm) ermittelt wurden: 42; 43; 36,5; 41,5; 40,5; 39,5; 44; 40; 41; 35,5; 36; 41; 38; 39,5; 40; 40,5; 37,5; 43,5; 38,5 und 42
a) Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der Plattendicke.
b) Angenommen, die Plattendicke ist normalverteilt und Mittelwert und Standardabweichung stimmen mit den entsprechenden Werten der Stichprobe überein, wie viel Prozent Ausschuss hat man zu erwarten, wenn eine Abweichung von ± 2,5 mm um den Mittelwert zulässig ist?
c) Welche Toleranzgrenzen sind festzulegen, damit nicht mehr als 5 % Ausschuss vorliegen?

Beispiel 2.28

Die Motoren eines Autofabrikanten haben eine mittlere Lebensdauer von 100 000 km mit einem mittleren Fehler von + oder - 20 000 km

a) Wie viele der erzeugten Motoren haben eine Lebensdauer von mindestes 125 000 km.

b) Bei wie vielen der Motoren weicht die Lebensdauer um mehr als 15 000 km vom Mittelwert ab?

c) Auf wie viel km muss durch Verbesserung des Motors die mittlere Lebensdauer erhöht werden damit mindestens 80 % dieser Motoren eine Lebensdauer von 90 000 km haben?

Anmerkung: Aufzeichnen der Verteilung hilft das Problem besser zu verstehen.

Beispiel 2.29

Eine Hobelmaschine stellt Platten her, deren Dicke um den Erwartungswert von 10 mm mit einem Fehler von etwa ± 0,02 mm streut. Wie viel Prozent Ausschuss ist zu erwarten, wenn die Platten

a) mindestens 9,97 mm aufweisen und höchstens 10,05 mm stark sein dürfen

b) nur maximal 0,03 mm vom Sollwert abweichen dürfen

2.5.5 Exponentialverteilung (stetig) ~ Exp(λ)

Die Exponentialverteilung ist eine stetige Verteilung. Anwendung findet sie vor allem bei der Beantwortung der Frage nach der Dauer von zufälligen Zeitintervallen. z. B.:

- Dauer von Dienstleistungen, Bearbeitungen,
- Zeiten zwischen Eintreten von Ereignissen (Zwischenankunftszeiten, Warteschlangentheorie)
- Lebensdauer von Bauteilen, Maschinen und Geräten
- …

Ihre Eigenschaften sind:

Dichtefunktion: $$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion: $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Erwartungswert: $$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

Varianz: $$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

2.5.6 Stetige Gleichverteilung ~ U(a,b)

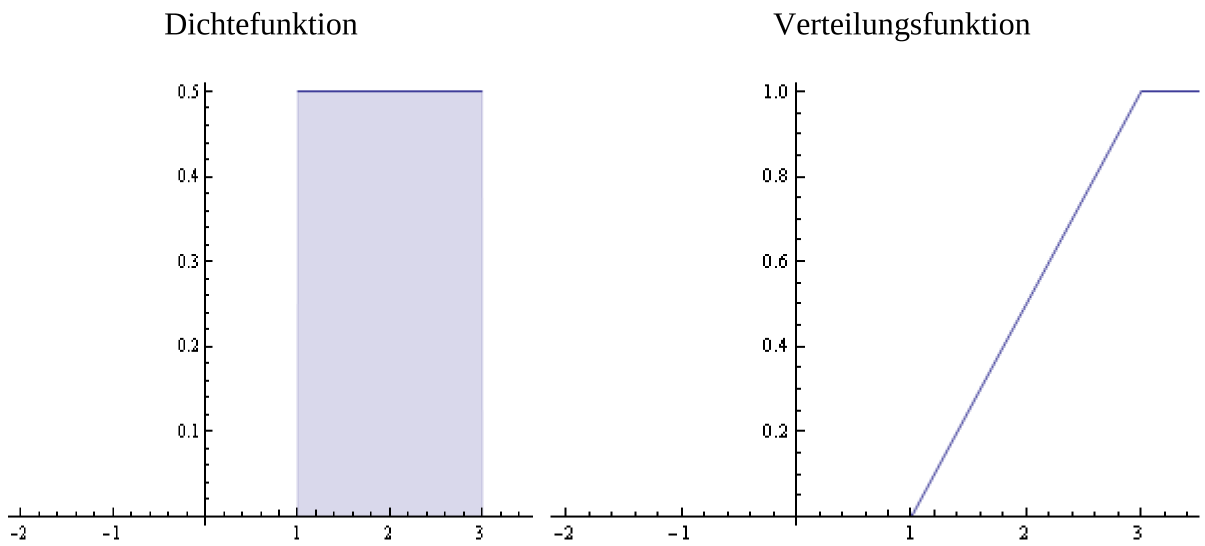
Die stetige Gleichverteilung, auch Rechteckverteilung genannt, zeichnet sich, ähnlich ihres diskreten Pendants, dadurch aus, dass die unterschiedlichen Ausprägungen einer Zufallsvariable in einem bestimmten Intervall (a,b) mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten können. Hier gilt jedoch die Stetigkeit der Zufallsvariable als Grundannahme.

Dichtefunktion: $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion: $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{falls} \quad a < x < b \\ 1 & \text{falls} \quad x \geq b \end{cases}$$

Erwartungswert: $$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Varianz: $$Var(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$$



2.6 Lösungen Stochastik

Beispiel 2.8

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2X\,E(X) + E(X)^2] \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Beispiel 2.9

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E[((X+Y) - E(X+Y))^2] \\ &= E[((X+Y) - E(X) - E(Y))^2] \\ &= E[((X - E(X)) + (Y - E(Y)))^2] \\ &= E[(X - E(X))^2 + 2(X - E(X))\,(Y - E(Y)) + (Y - E(Y))^2] \\ &= E[(X - E(X))^2] + E[(Y - E(Y))^2] + 2\,E[(X - E(X))\,(Y - E(Y))] \\ &= V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y) \end{aligned}$$

Beispiel 2.10

Der Erwartungswert einer Summe von beliebig vielen Zufallsvariablen ist gleich der Summe ihrer einzelnen Erwartungswerte

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 6$$

Beispiel 2.11

a) Die Varianz einer Summe von Zufallsvariablen ist im Allgemeinen nicht gleich der Summe ihrer einzelnen Varianzen – die Korrelation muss berücksichtigt werden:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\rho\, Var(X)\, Var(Y)$$

wobei ρ der Korrelationskoeffizient ist. Da wir hier zwei unkorrelierte Zufallsvariablen haben, ist $\rho = 0$, also gilt in diesem Fall

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 80\ .$$

b) Nun ist $\rho < 0$, also wird von $Var(X) + Var(Y)$ etwas Positives abgezogen. Folglich ist die Varianz einer Summe negativ korrelierter Variablen kleiner als die Varianz einer Summe unkorrelierter Variablen.

Beispiel 2.12

$CV_{neu} = 0{,}0025$

Beispiel 2.13

$\sigma_{neu} = 70{,}71068$ min

Beispiel 2.14

$$\Delta\,\sigma = \sigma_{\text{A+B}} - \sigma_{\text{C}} = 1.527{,}53\ Stück - 1.414{,}21\ Stück = 113{,}31\ Stück$$

Beispiel 2.16

Analog zu Beispiel 2.15 mit p = 2/5 (ROT) und q = 3/5 (SCHWARZ)
a) = 0,08704
b) = 0,2304
c) = 0,33696
d) = 0,8352
e) = 0,2304
f) = 0,68256
g) = 0,576
h) = 0,3174

Beispiel 2.17

P(X = 0) = 0,115

Beispiel 2.18

$P(X \le 2) = 0{,}1183$

Beispiel 2.19

$\lambda = np = 100000 \cdot 0{,}0001 = 10$

$$P(X = 5) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-10}\frac{10^5}{5!} = 0{,}0378$$

Beispiel 2.20

$P(X \ge 1) = 0{,}8262$

Beispiel 2.21

i	P_i	100*P_i	i	P_i	100*P_i		
0	0,0067	0,67	8	0,0653	6,53	$P(X \le 3)$ =	0,265
1	0,0337	3,37	9	0,0363	3,63	$P(X \le 7)$ =	0,867
2	0,0842	8,42	10	0,0181	1,81	$P(X \le 10)$ =	0,986
3	0,1404	14,04	11	0,0082	0,82		
4	0,1755	17,55	12	0,0034	0,34		
5	0,1755	17,55	13	0,0013	0,13	$P(X \ge 2)$ =	0,960
6	0,1462	14,62	14	0,0005	0,05	$P(X \ge 6)$ =	0,384
7	0,1044	10,44	15	0,0002	0,02	$P(X \ge 13)$ =	0,002

Beispiel 2.22

$\lambda = 2/6 = 1/3$
$P(X > 0) = 1- P(X = 0) = 0{,}2835$

Beispiel 2.23

$$P(X \leq 190) = F(190) = \Phi\left(\frac{190-150}{22}\right) = \Phi(1{,}82) = 0{,}9656 \text{ (aus Tabelle)}$$

$$P(X \leq 102) = F(102) = \Phi\left(\frac{102-150}{22}\right) = \Phi(-2{,}182) = 1-\Phi(2{,}182) = 1-0{,}9854 = 0{,}0146$$

$$P(X \geq 130) = 1-F(130) = 1-\Phi\left(\frac{130-150}{22}\right) = 1-\Phi(-0{,}909) = \Phi(0{,}909) = 0{,}8186$$

$$P(177{,}5 \leq X \leq 192{,}9) = \Phi\left(\frac{192{,}9-150}{22}\right) - \Phi\left(\frac{177{,}5-150}{22}\right) = \Phi(1{,}95) - \Phi(1{,}25) = 0{,}08$$

Beispiel 2.24

$\Phi(X) = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad x = N_{0{,}95} = 1{,}645$ (durch interpolieren)

$\Phi(X) = 0{,}45 \quad \Rightarrow \quad x = N_{0{,}45} = -0{,}126$ (durch interpolieren)

Beispiel 2.25

a) F(z)= 0,1894

b) F(-z)= 1 - 0,8686 = 0,1314

c) 0,3099

Beispiel 2.26

99 % der produzierten Stücke liegen innerhalb einer Abweichung von $\Delta\mu$= 5,15 g vom Mittelwert μ.

Beispiel 2.27

a) $\mu = 40$, $\sigma = 2{,}42$

b) 30,3% Ausschuss sind zu erwarten

c) Die Toleranzgrenze müsste ± 4,74mm betragen

Beispiel 2.28

a) F(-z) = 1 - 0,8944 = 0,1056

b) 1- 0,5467 = 0,4533 => 45,33 %

c) Die mittlere Lebensdauer des Motors muss 106 800 km betragen, wenn 80 % der Motoren eine durchschnittliche Lebensdauer von 90 000 km haben sollen.

Beispiel 2.29

a) Erwarteter Ausschuss 7,3 %

b) Erwarteter Ausschuss 13,36 %

3 Lineare Programmierung[3]

Lineare Programmierung, auch lineare Optimierung genannt, ist ein bedeutendes Verfahren des Operations Research und findet häufig Anwendung in Planungsprozessen. Ein Planungsprozess ist dabei eine strukturierte Vorgangsweise zur Verwirklichung von Zielen. Mit anderen Worten geht es um die gezielte Auswahl von optimalen Alternativen und damit in weiterer Folge um Entscheidungsfindung.
Als logischer erster Schritt müssen demnach Ziele definiert werden. Danach können Maßnahmen auf Basis von Entscheidungen gesetzt werden, um diese Ziele (Minimum –z.B. Kosten; Maximum – z.B. Gewinn) zu erreichen. Um bei mehreren Alternativen, die für die Zielerreichung in Frage kommen, die optimale zu finden, eignen sich mehrere Verfahren. In weiterer Folge wird an dieser Stelle nur das häufigste Verfahren, das Simplex-Verfahren, als der am weitesten verbreitete Algorithmus vorgestellt.
Lineare Gleichungen können dabei auf mehrere Arten angeschrieben werden. Dieses Skriptum wird sich dabei nur auf die „normale“ Schreibweise beziehen und nicht näher auf die Matrizenschreibweise eingehen. Sollten Sie allerdings jemals etwas genauer mit Linearen Optimierungsaufgaben konfrontiert sein, so empfiehlt es sich, sich die Matrizenschreibweise zu erarbeiten.

3.1 Modellformulierung

Sehr häufig liegen in der Lehre wie auch in der Praxis Optimierungsprobleme vor, die in einem Text beschrieben sind. Daher ist es zuerst einmal sehr wichtig, die Modellformulierung, also das Übertragen von Texten in ein lineares Gleichungssystem, zu beherrschen. Das Prinzip der linearen Programmierung wird in weiterer Folge anhand eines Beispiels aus der Produktionsprogrammplanung (Beispiel 3.1) erklärt.

Beispiel 3.1
Ein kleiner Möbel Fabrikant möchte seine Produktpalette erweitern und standardmäßig zwei neue Produkte anbieten. Ein Naturholzregal- und ein Schreibtischbausatz sollen das Sortiment erweitern. Die Produktion für diese Bausätze erfolgt in 3 verschiedenen Arbeitsstationen, die alle nur beschränkt zur Verfügung stehen, da andere Produkte bereits einen Teil der Kapazitäten belegen. Station 1 (Zuschneiden der Bretter) steht 4 Stunden pro Tag zur Verfügung, Station 2 (Beschichten der Bretter) 12 Stunden und Station 3 (Verpacken der Bausätze) 18 Stunden.
Für die Produktion eines Regalbausatzes werden 1 Stunde in Station 1 und 3 Stunden in Station 3 benötigt. Für einen Schreibtisch, für den die Teile bereits zugeschnitten zugekauft werden,

[3] Gould ; Eppen, Schmidt (1993): Introduction Management Science, 4th edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ

werden 2 Stunden in Station 2 und 2 Stunden in Station 3 gebraucht. Der Gewinn für einen Regalbausatz beträgt €300 und für einen Schreibtisch €500.
Wie viel soll von jedem Produkt erzeugt werden, um einen möglichst hohen Gewinn zu erzielen?

Für den ersten Schritt kann es hilfreich sein, sämtliche Informationen zusammenzufassen.

Station	Produktionszeiten pro Stück in Stunden Regalbausatz	Schreibtisch	Verfügbare Kapazität
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Gewinn pro Stück	300	500	

Diese Form der Darstellung erinnert jetzt schon stark an ein lineares Gleichungssystem. Die Entscheidungsvariablen sind, wie man schon aus der Fragestellung ableiten kann, die produzierten Stück der beiden Güter. Ab jetzt werden diese in diesem Beispiel mit x_1 (produzierte Stück Regalbausatz) und x_2 (produzierte Stück Schreibtisch) bezeichnet.
Mit diesen Informationen kann man ein Gleichungssystem aufstellen, dass in weiterer Folge lösbar ist.

Zielfunktion: $$Z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

Nebenbedingungen:
$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

Nichtnegativitätsbedingungen: $$x_1, x_2 \geq 0$$

Für die Programmerstellung werden Entscheidungsvariablen benötigt. Im Prinzip sind dies die Größen, die (theoretisch) frei festgelegt werden können. Das Ziel ist, für diese Entscheidungsvariablen optimale Werte zu finden. Alle anderen Größen, die ebenfalls Einfluss auf das Problem haben, aber nicht beeinflusst werden können, oder nicht verändert werden sollen fließen über zusätzliche Bedingungen in das lineare Programm ein. Die Optimalität wird durch die Zielfunktion repräsentiert, wobei die Koeffizienten vor den Variablen das Verhältnis derer zueinander, zumeist in Geldeinheiten, ausdrücken.
Hätte man nur eine Zielfunktion wie im obigen Beispiel, so wäre das Finden eines Optimums unmöglich, da immer noch bessere Lösungen möglich werden (x_1, $x_2 \rightarrow \infty$). Normalerweise werden solche Zielfunktionen aber ohnehin durch Gegebenheiten der Produktion in Form von Kapazitäten beschränkt. Diese Gegebenheiten werden als Nebenbedingungen bezeichnet und

meistens als Ungleichungen wiedergegeben. Üblicherweise werden solche Nebenbedingungen so angeschrieben, dass alle Variablen auf der linken Seite zu finden sind und die rechte Seite nur reine Zahlenwerte beinhaltet.
Zusätzlich gilt die Bedingung, dass alle Entscheidungsvariablen ausschließlich positive Werte annehmen können oder gleich null sind. Dies wird durch die Nichtnegativitätsbedingung zum Ausdruck gebracht.

Anmerkung: Für die Erstellung von linearen Programmen gibt es einige Grundannahmen und Regeln, die hier aber nicht weiter diskutiert werden. Die Beispiele in diesem Skriptum dienen nur als eine Einführung und decken bei weitem nicht das ganze Spektrum der Linearen Programmierung ab.

3.2 Graphische Lösung von linearen Programmen

Ein lineares Programm mit nur zwei Entscheidungsvariablen, kann graphisch gelöst werden. Dazu muss zunächst der Bereich aller zulässigen Lösungen in ein Diagramm eingetragen werden. Dabei ist die Nichtnegativitätsbedingung zu beachten.
Jede dieser Nebenbedingungen wird als Gerade dargestellt, wobei jeder Punkt auf dieser Geraden eine Kombination aus x_1 und x_2, die die Nebenbedingung exakt (als Gleichung) erfüllt, repräsentiert. Punkte, um die Geraden einzuzeichnen erhält man, indem in der Nebenbedingung eine Variable Null gesetzt wird und nach der anderen aufgelöst wird (die entsprechenden Punkte können dann für beide Achsen berechnet und verbunden werden). Mit der Nichtnegativitätsbedingung ergibt sich daraus der **zulässige Lösungsraum** (Abbildung 4.1) (Fortsetzung von Beispiel 3.1)

Abbildung 4.1 zulässiger Lösungsraum

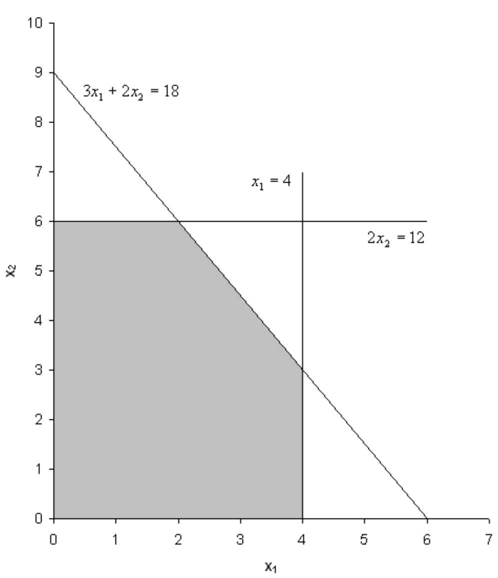
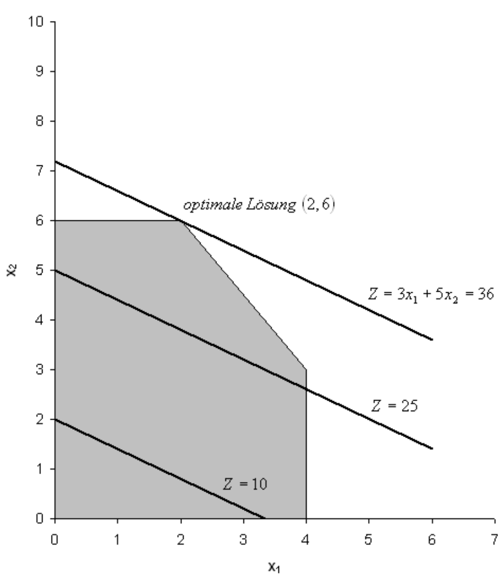


Abbildung 4.2 optimale Lösung



Die optimale Lösung erhält man, wenn man die Zielfunktion so einzeichnet, dass sie nur an einem Punkt den Lösungsraum berührt, bei einem Maximierungsproblem so weit als möglich oben, bei einem Minimierungsproblem soweit als möglich unten. Um zu einer Startzielfunktion zu gelangen, die man dann parallel verschieben muss, nimmt man einen Wert der Zielfunktion an, z.B. Z=10, und berechnet die dazugehörigen Werte von x_1 und x_2 (x_1 Null setzen und nach x_2 auflösen) Der optimal Lösungspunkt ist somit abhängig von der Zielfunktion. Es besteht die Möglichkeit, dass es keine Lösung gibt. Das ist zum Beispiel der Fall wenn kein zulässiger Lösungsraum existiert (wenn sich die Nebenbedingungen gegenseitig ausschließen) oder, dass der Lösungsraum unbeschränkt ist (wenn der Lösungsraum nach einer Seite offen ist). Sollte eine Lösung existieren, so befindet sich die optimale Lösung in unserem Fall stets an einem der Eckpunkte (wenn die Zielfunktion im Optimum entlang einer Nebenbedingungsgeraden verläuft, kann es ausnahmsweise zu unendlich vielen Lösungen kommen).
Dabei ist aber zu unterscheiden, dass der Lösungsraum bei einem Minimierungsproblem durchaus nach oben hin unbeschränkt sein kann und trotzdem nach unten hin genau eine Lösung existieren kann. Es kommt somit darauf an, wo der Lösungsraum unbeschränkt ist.
Ein weiterer Spezialfall tritt auf, wenn die Zielfunktion und eine Nebenbedingung ident sind. In diesem Fall kann es dazu kommen, dass unendlich viele Lösungen existieren.

Beispiel 3.2
Lösen Sie folgendes lineares Problem graphisch.

$$\begin{aligned} Z = 15x_1 + 25x_2 &\rightarrow \text{Min} \\ x_1 + 2x_2 &> 11 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &> 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel 3.3
Lösen Sie folgendes lineares Problem graphisch:

$$\begin{aligned} Z = 2x_1 + 4x_2 &\rightarrow \text{Max} \\ x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 3x_1 - 2x_2 &\leq 10 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel 3.4

Für den Bau einer U-Bahn plant eine Stadt die Anschaffung von zwei verschiedenen Typen A und B an U-Bahn Garnituren. Jene Firma, die den Auftrag erhält, kann auf Grund ihrer Kapazitäten höchstens 90 Stück vom Typ A und 75 Stück vom Typ B liefern. Die Zusatzausstattung (z.B. Klimaanlage) kostet für einen Waggon des Typs A 40 GE, für einen Waggon des Typs B 70 GE. Für diese zusätzliche Ausstattung ist ein Betrag von höchstens 10000 GE vorgesehen. Eine Garnitur des Typs A bringt 50 Einheiten Energieersparnis und ein Wagen des Typ B bringt 70 Einheiten an Energieersparnis. Es werden außerdem nicht mehr als 100 Garnituren für die neue U-Bahnlinie benötigt. Ziel der Stadt ist es, möglichst viel Energie einzusparen. Formulieren Sie für dieses Problem ein Lineares Programm und lösen Sie dieses graphisch.

Beispiel 3.5

Drei Legierungen L1, L2 und L3 werden aus 3 verschiedenen Arten von Altmetallen A, B, C hergestellt. Die folgende Tabelle gibt Aufschluss über das Verhältnis der Altmetalle (in Prozent) in den Legierungen.

	A	B	C
L1	20	60	20
L2	70	20	10
L3	40	15	45

Der Gewinn pro Tonne Legierung beträgt bei L1 1500, bei L2 2000 und bei L3 900 Geldeinheiten. Von Altmetall A sind 18t lagernd, von Altmetall B 20t und von Altmetall C 13t. Formulieren Sie das gewinnmaximierende lineare Programm.

Beispiel 3.6

Ein Unternehmen möchte ein neues Produkt in drei verschiedenen Ausführungen (Premium, Standard, Basic) fertigen. Der Gewinn für die jeweiligen Ausführungen variiert von €375 für die Premium Version, €290 für die Standard Version bis hin zu €204 für die Basic Version.
Das Unternehmen hat an drei Standorten noch freie Kapazitäten, die für dieses Produkt genutzt werden sollen. Es können in Standort A 800 Stück, in Standort B 950 Stück und in Standort C 550 Stück produziert werden, wobei die Ausführung für die Stückzahl egal ist.
Allerdings hat das Management beschlossen, dass an allen drei Standorten, der gleiche Prozentsatz der freien Kapazitäten genutzt werden soll. Prognosen erwarten, dass 2000, 3500 und 1500 Stück der Premium, Standard und Basic Version pro Tag abgesetzt werden könnten.
Des Weiteren ist die freie Lagerkapazität in den einzelnen Standorten beschränkt. Standort A hat noch 25000m^2, Standort B 13000m^2 und Standort C 7000m^2 an freier Lagerkapazität zur Verfügung. Je nach Ausführung benötigt ein Premiumprodukt 5000, ein Standardprodukt 3000

und ein Basisprodukt 2500 cm^2 Lagerfläche. Formulieren Sie mit diesen Angaben ein lineares Programm.

Beispiel 3.7

Ein Landwirt verfügt über 800 000 m^2 landwirtschaftliche Nutzfläche. Er hat technisch die Möglichkeit, Weizen und/oder Kartoffeln anzubauen. Bei Weizen erzielt er einen Ertrag von 1860 GE/ha, bei Kartoffeln von 3346 GE/ha. Der Arbeitsaufwand beträgt bei Weizen und Kartoffeln 10 Stunden/ha bzw. 30 Stunden/ha und Jahr. Für die Ackerarbeit kann der Bauer neben seiner sonstigen Arbeit 150 Stunden pro Monat einplanen. Saatgut und Maschinen verursachen jährlich Kosten bei Weizen und Kartoffeln von 400 GE/ha und 800 GE/ha. Diese Kosten müssen vom Landwirt aus den Ernteerlösen des Vorjahres vorfinanziert werden. Für das laufende Jahr stehen ihm dazu 60800 GE zur Verfügung.

a) Stellen Sie das dazugehörige lineare Programm auf.
b) Berechnen Sie grafisch, wie der Bauer seine Ackerfläche im kommenden Jahr bebauen soll, damit er den maximalen Ertrag erwirtschaftet. Wie hoch ist dieser?

Beispiel 3.8

Raymond Rose ist der bekannteste Schuster für die Erzeugung hochwertiger handgefertigter Tanzschuhe. In seinem kleinen Familienbetrieb „Rose Dancing Shoes“ kümmert er sich höchstpersönlich um die Herstellung der Schuhe, während seine Frau die Buchhaltung organisiert. Aufgrund ihres Alters halten beide eine Arbeitszeit von Montag bis Freitag von 08:00-16:00 Uhr ein. Die Schuhe sind sehr beliebt und er bietet 3 verschiedene Versionen an. Aufgrund langjähriger Erfahrungen weiß Herr Rose, dass er ein Paar Standardschuhe um € 110 verkaufen kann. Der Jazz-Tanzschuh ist nur für eine ausgewählte Gruppe interessant und kommt auf € 136 pro Paar. Aufgrund des immer mehr in Mode kommenden Lateintanzes, sind die Latein-Schuhe mit € 153 das teuerste Paar.

Die Kosten für das Rauleder betragen pro Jazz- und Lateinschuh € 4,5, für einen Standardschuh das Doppelte. Der Kostentreiber beim Material für die Schuhe ist das Rauleder, wel-ches mit € 3000/m^2 zu Buche schlägt. Jede Woche stehen 21dm^2 Rauleder zur Verfügung. Der Hauptkostenfaktor der Schuhe stellt die Arbeitszeit mit € 65 pro Stunde dar. Erfahrungs-gemäß braucht die Herstellung für ein Paar Jazz-Tanzschuhe genau 1h, ein Paar Standard-Schuhe braucht um 12min weniger, ein Paar Latein-Tanzschuhe um 12min mehr.

Die Tanzschuhe der Marke Standard werden in unlimitierter Stückzahl ausschließlich in Wien vertrieben. Die Jazz- und Lateinschuhe werden ausschließlich ins Ausland verschickt. Die Transportkosten von einem Paar Lateintanzschuhen betragen für das Unternehmen € 16, die für Jazz das Doppelte. Als speziellen Service bietet das Unternehmen „Rose Dancing Shoes“ einen Gratislieferservice für seine Kunden an. Aus Unternehmenssicht dürfen diese Kosten € 800 nicht übersteigen. Erstellen Sie ein lineares Programm zur Bestimmung der Produktionsmengen pro Woche, die den maximalen Deckungsbeitrag sichern.

3.3 Lösungen Lineare Programmierung

Beispiel 3.2
Z= 140, x_1=1, x_2=5

Beispiel 3.3
Z= 26, x_1=3, x_2=5

Beispiel 3.4
Z= 6500, x_1=25, x_2=75

Beispiel 3.5

$$
\begin{aligned}
1500x_1 + 2000x_2 + 900x_3 &\rightarrow \max \\
0{,}2x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}4x_3 &\leq 18 \\
0{,}6x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}15x_3 &\leq 20 \\
0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}45x_3 &\leq 13 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Beispiel 3.6

$$
\begin{aligned}
375(x_{1P} + x_{2P} + x_{3P}) + 290(x_{1S} + x_{2S} + x_{3S}) + 204(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) &\rightarrow \max \\
x_{1P} + x_{1S} + x_{1B} &\leq 800 \\
x_{2P} + x_{2S} + x_{2B} &\leq 950 \\
x_{3P} + x_{3S} + x_{3B} &\leq 550 \\
x_{1P} + x_{2P} + x_{3P} &\leq 2000 \\
x_{1S} + x_{2S} + x_{3S} &\leq 3500 \\
x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} &\leq 1500 \\
0.5x_{1P} + 0.3x_{1S} + 0.25x_{1B} &\leq 25000 \\
0.5x_{2P} + 0.3x_{2S} + 0.25x_{2B} &\leq 13000 \\
0.5x_{3P} + 0.3x_{3S} + 0.25x_{3B} &\leq 7000 \\
\frac{1}{800}(x_{1P} + x_{1S} + x_{1B}) &= \frac{1}{950}(x_{2P} + x_{2S} + x_{2B}) \\
\frac{1}{950}(x_{2P} + x_{2S} + x_{2B}) &= \frac{1}{550}(x_{3P} + x_{3S} + x_{3B}) \\
x_{1P}, x_{2P}, x_{3P}, x_{1S}, x_{2S}, x_{3S}, x_{1B}, x_{2B}, x_{3B} &\geq 0
\end{aligned}
$$

Beispiel 3.7

a)

$$
\begin{array}{rcrcl}
1860x_1 & + & 3346x_2 & \rightarrow & \max \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 80 \\
10x_1 & + & 30x_2 & \leq & 1800 \\
400x_1 & + & 800x_2 & \leq & 60800 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

b) $x_1 = 30$ha
$x_2 = 50$ ha
Z = 223100 GE

Beispiel 3.8

x_1= Standard;
x_2=Jazz;
x_3=Latein

a.)

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
40x_1 & + & 30x_2 & + & 50x_3 & \rightarrow & \max \\
18x_1 & + & 9x_2 & + & 9x_3 & \leq & 630 \\
0.8x_1 & + & x_2 & + & 1.2x_3 & \leq & 40 \\
 & & 32x_2 & + & 16x_3 & \leq & 800 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

4 Modellierung von Geschäftsprozessen

Bitte beachten Sie, dass es unter https://www.wu.ac.at/erp einen Webtrainer zum Thema Prozessmodellierung für die Prüfungsvorbereitung gibt!

4.1 Grundlagen Modellierung[4]

Um reale Sachverhalte darzustellen, die oft komplexe Zusammenhänge beinhalten, ist die Vereinfachung durch Modelle notwendig. Ein Modell ist die systematische Darstellung eines Ausschnitts der Realität mit Hilfe von Methoden und Werkzeugen. Modelle umfassen Objekte, Akteure, Zusammenhänge, etc. Folgende Prinzipien liegen der Modellerstellung zu Grunde:

- Abstraktion
- Partitionierung
- Projektion

Grundsätzlich dienen diese Modelle zur vereinfachten Darstellung und Archivierung von Systemen. Darüber hinaus jedoch tragen sie einen wesentlichen Teil zu einer einfachen, konkreten Kommunikation bei. Dies gelingt jedoch nur, wenn grundlegende Prinzipien beachtet werden und einzelne Modelltypen schlüssig verwendet werden.

Prinzipien der Modellierung

<u>Abstraktion</u>

Die Abstraktion beschränkt sich auf die essentiellen, für den Sachverhalt relevanten Teile des Systems. Die vorhandene Menge der Daten, die über die Sinne aufgenommen werden, ist zu umfangreich um sie vollinhaltlich darzustellen. Eine Abgrenzung zu ignorierten Daten ist notwendig.
Beispiele für Abstraktion:

- Inhaltsverzeichnis eines Buches
- Ortsplan
- Aufzeichnung von persönlichen Daten

<u>Konkretisierung</u>

Im Prinzip der Konkretisierung erfolgt eine genauere Betrachtung der Objekte eines Modells und eine Aufteilung in kleinere Untergruppen. Konkretisierung bezeichnet daher die Anwendung eines abstrakten Konzeptes auf eine spezifische Situation. Ein Beispiel für

[4] Vgl. Bemroider, Stix, Grundzüge der Modellierung (2006)

Konkretisierung wäre die Umsetzung eines Plans: ein Plan ist etwas Abstraktes und wird mit der Umsetzung zunehmend konkreter.

<u>Partitionierung</u>
Im Rahmen der Partitionierung werden Teilsysteme innerhalb eines großen Systems betrachtet. Durch diese Fokussierung wird das System überschaubarer. Sämtliche Teilsysteme haben Systemgrenzen, über die sie mit dem Gesamtsystem kommunizieren können. Die Möglichkeit des Zusammenspiels der einzelnen Teile ist unabdingbar.
Beispiele für Partitionierung:

- Gliederung eines Buches in Kapitel
- Aufteilung einer Software nach Geschäftsprozessen, z.B. Buchhaltung, Einkauf, Verkauf, usw.

<u>Projektion</u>
Bei der Projektion wird das Modell aus verschiedenen Sichten betrachtet, demzufolge ist das Modell präziser und vollständig. Die Probleme der Kommunikation wie z.B. Missverständnisse und Auslassung können verhindert werden.
Beispiele für Projektion:

- Index,
- Inhaltsverzeichnis,
- Funktionalität einer Software aus Sicht der Kunden, der Manager, etc.

4.2 Ereignisgesteuerte Prozesskette (EPK)[5]

Das **EPK-Modell** fällt in den Bereich der Prozess- und Anforderungsmodellierung. Die Prozessanalyse soll einen kompletten Einblick in die Tätigkeiten, welche in einem System stattfinden, geben. Die Modellierung dieser Prozesse dient zur Kommunikation und Dokumentation. Die Prozesse stellen eine Verkettung von Aktivitäten, die sequenziell oder parallel ablaufen, dar.
Die Ereignisgesteuerte Prozesskette (EPK) ist eine graphische Modellierungssprache zur Darstellung von Geschäftsprozessen einer Organisation bei der Geschäftsprozessmodellierung. Sie stellen Arbeitsprozesse in einer semiformalen Modellierungssprache graphisch mit Syntaxregeln dar. Das Grundmodell der EPK umfasst Verknüpfungsoperatoren, Kanten und Knoten. Es gibt zwei Knotentypen, Ereignisse und Funktionen. Ereignisse und Funktionen müssen immer abwechselnd aufeinander folgen.

[5] Vgl. Bemroider, Stix, Grundzüge der Modellierung (2006)

4.2.1 Knotentypen

<u>Ereignis</u>

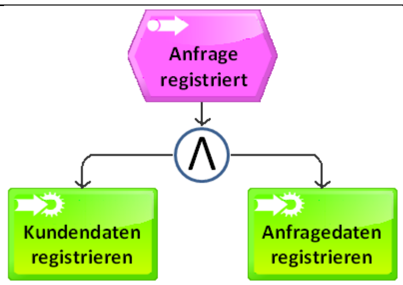
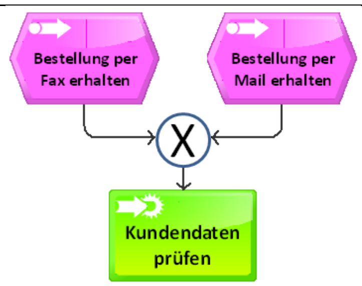
Ein EPK startet und endet immer mit einem Ereignis-Knoten. Ein Ereignis ist ein Zustand, der vor oder nach einer Funktion auftritt und Funktionen auslöst. Das Symbol für ein Ereignis ist wie folgt:

<u>Funktion</u>

Eine Funktion ist eine Aktion oder Aufgabe, die auf ein Ereignis folgt. Funktionen transformieren einen Eingangszustand in einen Zielzustand. Nach Ende der Funktion wird das darauf folgende Ereignis ausgelöst. Die Funktion wird folgendermaßen dargestellt.

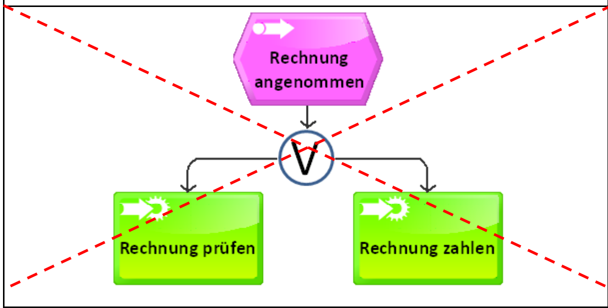
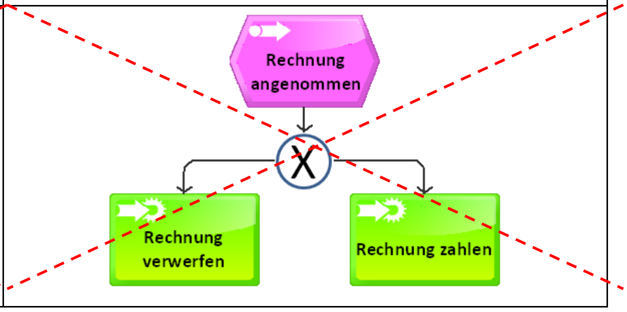
4.2.2 Verknüpfungsoperatoren

Die Verknüpfungsoperatoren dienen der Aufspaltung oder Vereinigung des Kontrollflusses. Es gibt drei verschiedene Verknüpfungsoperatoren.

Und- Verknüpfung	Oder- Verknüpfung	XOR- Verknüpfung
		
Alle eingehenden und ausgehenden Kanten sind aktiv.	Mind. eine ein- und ausgehende Kante ist aktiv.	Eine ein- und auslaufende Kante ist aktiv.
		
Sobald die Anfrage registriert worden ist, werden die Kundendaten und Anfragedaten registriert.	Sobald die mündliche Prüfung und / oder die schriftliche Prüfung bestanden worden ist, wird das Zertifikat erstellt	Entweder eine Bestellung per Fax oder eine Bestellung per Mail muss erhalten werden, um die Kundendaten zu überprüfen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten Ereignisse und Funktionen innerhalb des EPKs zu kombinieren.

Einschränkungen: Zwei Kombinationsvarianten sind **<u>nicht erlaubt</u>**, da Ereignisse keine Entscheidungen treffen können.

<table>
<tr><th>Fall 1</th><th>Fall 2</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Beispiel 4.1

Die Einkaufsabteilung erhält täglich mehreren Anfragen. Nachdem eine Anfrage eingegangen ist, wird sie überprüft und wenn sie korrekt ist, wird ein passendes Angebot unterbreitet und abgeschickt.

Beispiel 4.2

Ein Produktionsunternehmen möchte ein neues Produkt herstellen. Dafür erzeugt das Unternehmen einen Prototyp und führt eine Marktforschung durch. Nachdem die erhobenen Daten analysiert worden sind, wird entschieden, ob das Produkt verworfen oder mit der Produktion des Produkts begonnen wird.

Beispiel 4.3

Nach Erhalt einer Anfrage zur Erstellung eines neuen Kunden in einem Computersystem überprüft die Verkaufsabteilung, ob der Kunde bereits existiert. Sollte der Kunde bereits kreiert worden sein, wird die Kundenerstellung abgebrochen. Für den Fall, dass der Kunde noch nicht im System existiert, werden Informationen zu folgenden Bereichen eingetragen: Allgemein-, Verkaufsgebiets- und Unternehmensdaten. Mit erfolgter Eintragung der Daten ist der Kundenerstellungsprozess abgeschlossen.

Beispiel 4.4

Der Bezahlungsprozess in einer Maßschneiderei ist wie folgt aufgebaut. Nach erfolgter Bestellung durch den Kunden wird die Bezahlungsart in Erfahrung gebracht. Es stehen zwei Möglichkeiten zur Wahl: Bezahlung per Bankomatkarte oder in Bar. Im ersten Fall muss das Terminal vom Mitarbeiter zuerst freigeschalten werden bevor der Kunde seine Karte einstecken und die Bezahlung bestätigen kann. Im zweiten Fall nimmt der Mitarbeiter das Geld entgegen, wobei der Betrag genau beglichen wird oder der Kunde Wechselgeld bekommt. Mit der

Auszahlung des Wechselgeldes bzw. Bestätigung der Zahlung per Bankomatkarte ist die Rechnung beglichen. Der Kunde bekommt jedenfalls eine gedruckte Rechnung ausgehändigt. Damit ist der Prozess beendet.

Beispiel 4.5

In einem Fastfood-Restaurant kommen Kunden zum Schalter, um ihre Bestellung aufzugeben. Das Personal ermittelt den Bedarf des Kunden, wobei sich herausstellt, dass der Kunde entweder Durst oder Hunger oder beides hat. Nach der Bestellungserfassung holt der Mitarbeiter die gewünschten Waren und stellt diese auf das Tablett. Der Prozess sieht vor, dass der Kunde am Ende nochmals gefragt wird, ob er noch weitere Wünsche hat. Sollte der Kunde noch weitere Wünsche haben, durchläuft er die Bedarfsermittlung und Bestellungserfassung erneut nach bereits geschildertem Schema solange bis er keine Wünsche mehr hat. Für den Fall, dass keine weiteren Wünsche bestehen, ist der Bestellvorgang abgeschlossen.

4.3 Entity Relationship Model[6]

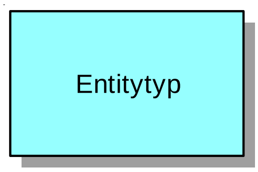
Ein zweites sehr verbreitetes Modell ist das **ER-Modell**. Das ER-Modell ist ein semantisches Datenmodell und dient zur Analyse der Daten und automatischen Überführung des Modells in die Strukturen des Datenbanksystems. Die ER-Modellierung stellt eine statische Sicht auf die Daten dar. Die ER-Modellierung ist sehr verbreitet, da sie einfach und leicht verständlich ist.

Um ein ER-Modell zu erstellen, benötigt man Entitäten. Jede Entität kann ein oder mehrere Attribute besitzen. Um den Zusammenhang zwischen zwei Entitäten darzustellen, legt man Beziehungen und Kardinalitäten fest.

4.3.1 Entität

Entitäten sind reale Objekte, die untereinander Beziehungen eingehen können. Eine Entität ist eindeutig identifizier- und unterscheidbar, wobei sie

- in der realen Welt existiert,
- für das Problem Relevanz besitzt und
- in der Realität in mehreren Ausprägungen vorkommt



Es gibt ***drei Arten*** von Entitäten

1. Entitäten, die Informationen über Objekte oder Subjekte aufzeichnen z.B. Manager, Wohnung
2. Entitäten, die Informationen über Aktivitäten oder Ereignisse darstellen Abmeldung, Ausleihe

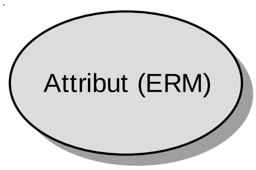
[6] Vgl. Bemroider, Stix, Grundzüge der Modellierung (2006)

3. Entitäten, die Informationen über einen abstrakten Zusammenhang abbilden Projekt, Buchungskonten

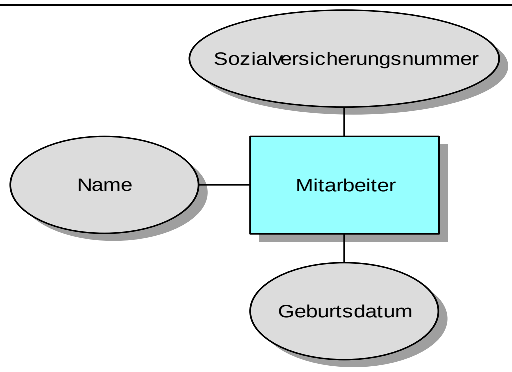
Eine Menge gleichartiger Entitäten wird als Entitätstyp bezeichnet. Entitäten werden dem Entitätstypen gegenübergestellt. Instanzen stellen konkrete Ausprägungen eines Entitätstyps dar.

4.3.2 Attribut

Ein Attribut beschreibt bzw. stellt die Eigenschaft einer Entität dar. Es sind nur für das Problemfeld relevante Eigenschaften einer Entität anzugeben.



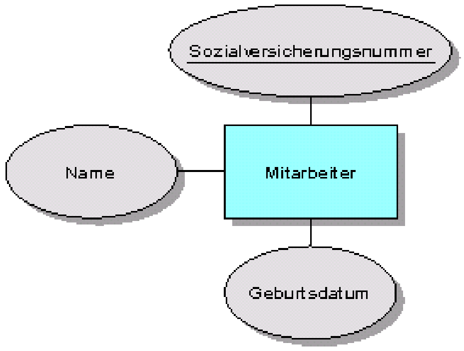
Darstellung der Attribute

Entitäten	Attribute	
Mitarbeiter	Sozialversicherungsnummer, Name, Geburtsdatum,	

Im Zusammenhang mit Attributen nimmt das **Schlüsselattribut** eine primäre Stellung ein. Um die Entitäten eindeutig zu identifizieren, muss jedem Entitätstyp ein Schlüsselattribut bzw. eine Menge an Schlüsselattributen zugewiesen werden. Desweiteren darf das Schlüsselattribut nur ein Mal vorkommen. Demzufolge ist seine Ausprägung über alle Instanzen eines Entitätstyps eindeutig.

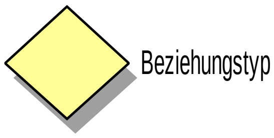
Wenn man die oben aufgelisteten Attribute betrachtet, kann man erkennen, dass das Attribut Sozialversicherungsnummer bei der Entität Mitarbeiter aufgrund seiner Einzigartigkeit als Schlüsselattribut definiert werden kann. Die Darstellung wäre folgendermaßen.

Festlegung der Schlüsselattribute



4.3.3 Beziehungen

Die Beziehung (Relationship) stellt die Verknüpfung zwischen zwei oder mehreren Entitäten dar. Ein Beziehungstyp verbindet zwei oder mehrere Entitäten in semantischer Weise. Einige Beispiele für Beziehungstypen wären:

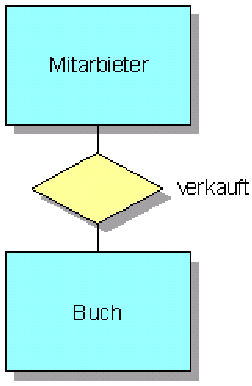


telefoniert, arbeitet, benutzt, etc.

Beziehungen werden den Beziehungstypen oder Beziehungsexemplaren gegenübergestellt. Exemplare werden auch als Instanzen, welche konkrete Ausprägungen eines Beziehungstyps darstellen, bezeichnet.

Bei Beziehungstypen unterscheidet man einerseits den Grad einer Beziehung, anderseits die Kardinalität. Der Grad gibt die Anzahl der unterschiedlichen Entitätstypen, die miteinander in Beziehung stehen, an.

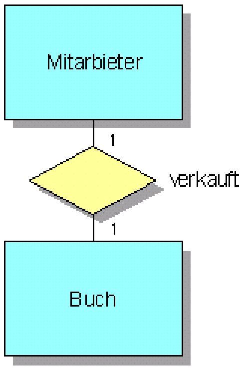
In dem angeführten Beispiel verbindet der Beziehungstyp *verkauft* die Entitätstypen *Mitarbeiter* und *Buch*. Der Grad der Beziehung ist zwei, auch binäre Beziehung genannt.



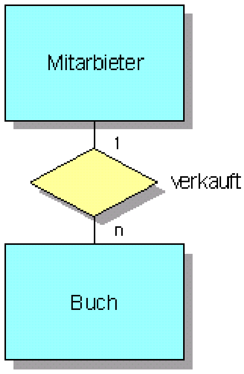
4.3.4 Kardinalität

Die Kardinalität beschreibt in welcher mengenmäßigen Beziehung die Entitäten zueinander stehen. Es gibt grundsätzlich drei Grundtypen von Kardinalitäten:

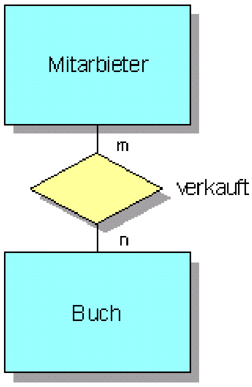
1. 1:1 Beziehung: Entität vom Typ A kann höchstens mit einer Entität vom Typ B in Beziehung stehen und umgekehrt.
   Im vorliegenden Beispiel kann ein Mitarbeiter höchstens ein Buch verkaufen und ein Buch kann höchstens durch einen Mitarbeiter verkauft werden.



2. 1:n Beziehung: Entität vom Typ A kann mit null oder mehreren Entitäten vom Typ B in Beziehung stehen. Im Gegensatz dazu kann die Entität vom Typ B nur mit höchstens einer Entität vom Typ A in Beziehung stehen.
   Ein Mitarbeiter kann mehrere Bücher verkaufen, aber ein Buch kann nur von einem Mitarbeiter verkauft werden.



3. n:m Beziehung: Entität vom Typ A kann mit null oder mehreren Entitäten vom Typ B in Beziehung stehen, umgekehrt kann eine Entität vom Typ B auch mit null oder mehreren Entitäten vom Typ A in Beziehung stehen.
   Ein Mitarbeiter kann mehrere Bücher verkaufen und ein Buch kann von mehreren Mitarbeitern verkauft werden.



Beispiel 4.6

Ein Prüfer hat ein Spezialgebiet und kann mehrere Studenten prüfen. Hingegen kann auch ein Student von mehreren Prüfern geprüft werden. Weiters kann ein Student mehrere Bücher ausleihen, wobei ein Buch nur von einem Studenten ausgeliehen werden kann.

Beispiel 4.7

In diesem Beispiel wird der Bestellvorgang in einem Versandhaus beschrieben.

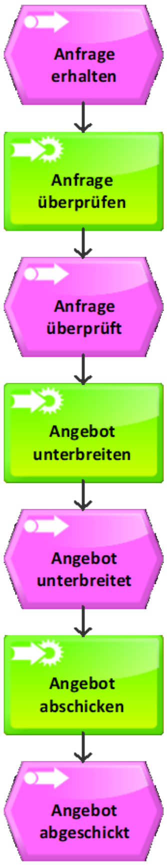
Jeder Kunde bestimmt die Zustelladressen, die sich aus Adressdaten und Ansprechpartner zusammensetzen. Jede Zustelladresse wird durch einen Kunden bestimmt. Der Kunde verfügt über folgende Attribute: Kundennummer, Name und Adresse. Jeder Kunde kann mehrere Bestellungen aufgeben, umgekehrt aber kann eine Bestellung nur von einem Kunden aufgegeben werden. Die Bestellung hat die Attribute Bestellnummer und Bestelldatum. Desweiteren kann eine Bestellung mehrere Artikel, welche sich durch Preis, Bezeichnung und Artikelnummer charakterisieren, enthalten und umgekehrt kann ein Artikel mehrfach bestellt werden.

Beispiel 4.8

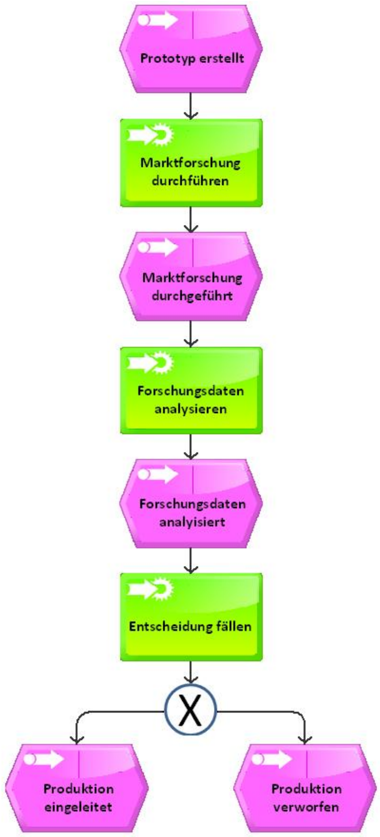
Ein Lektor prüft mehrere Studenten, welche sich durch Matrikelnummer, Name und Geburtsdatum authentifizieren und umgekehrt kann ein Student durch mehrere Lektoren geprüft werden. Der Lektor wird durch Titel, Name und Mitarbeiternummer authentifiziert und ist in einem Institut, welches das Attribut Ort besitzt, angestellt. Ein Lektor hält mehrere Vorlesungen und eine Vorlesung kann von mehreren Lektoren abgehalten werden. Die Vorlesung besitzt eine Vorlesungsnummer und ein Thema. Die Vorlesung kann von mehreren Studenten besucht werden und umgekehrt.

4.4 Lösungen Modellierung

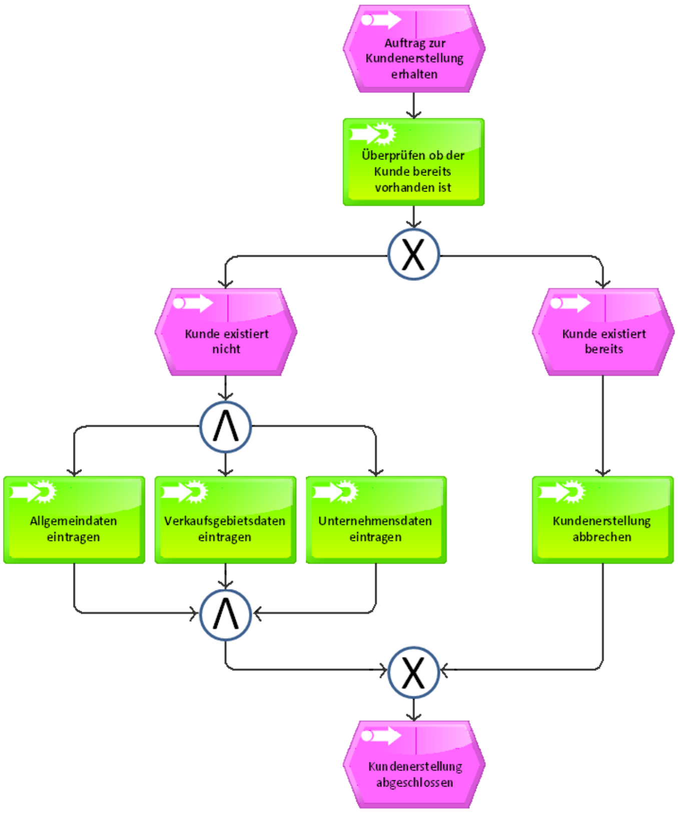
Beispiel 4.1



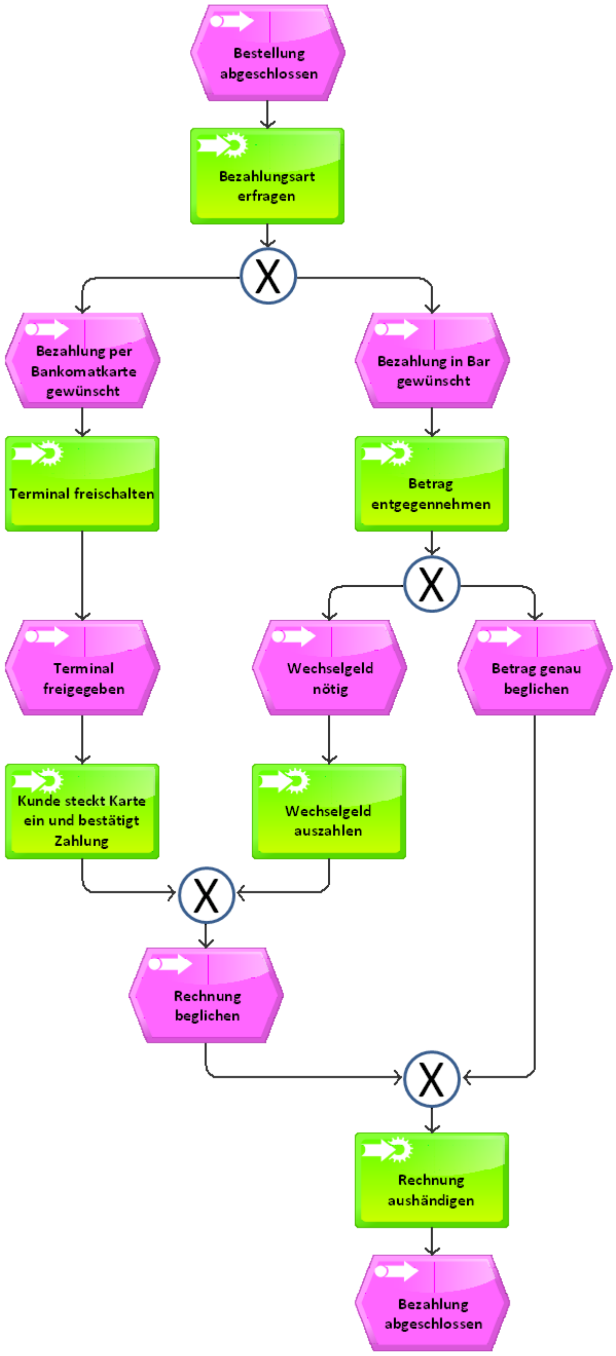
Beispiel 4.2



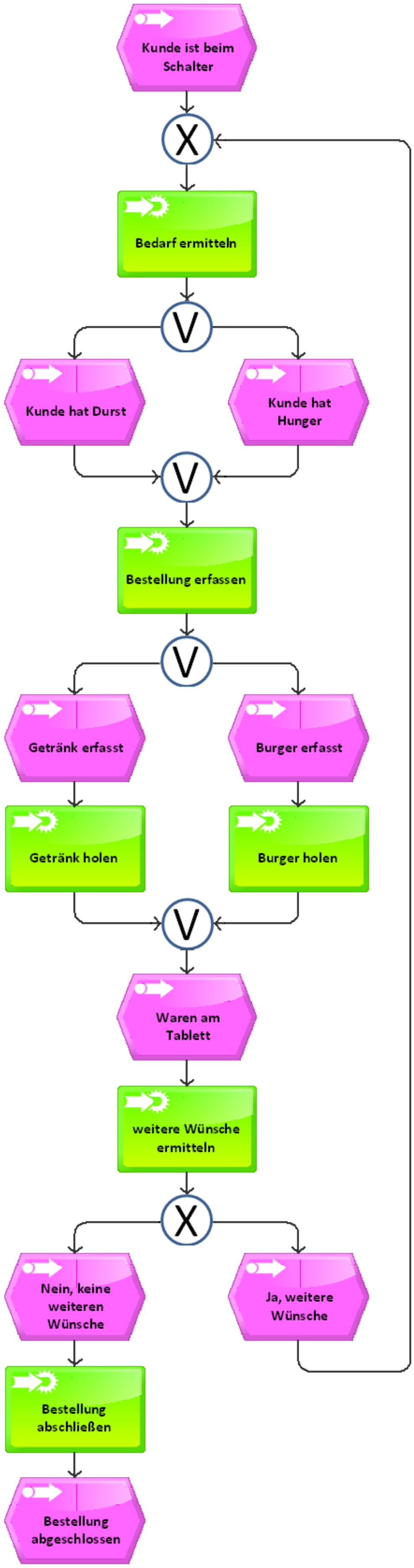
Beispiel 4.3



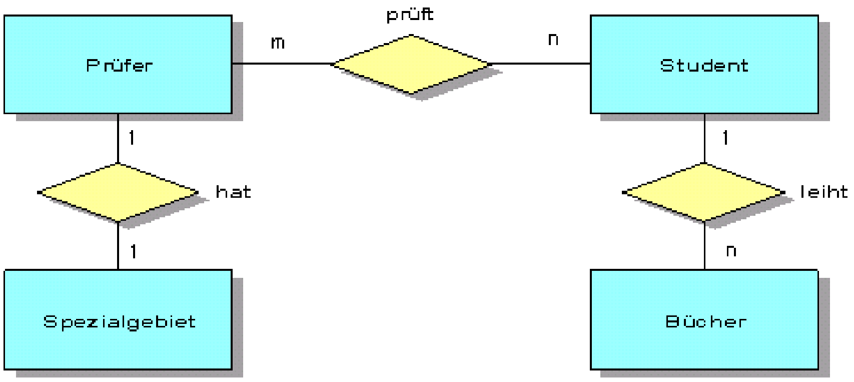
Beispiel 4.4


Bestellung abgeschlossen
Bezahlungsart erfragen
Bezahlung per Bankomatkarte gewünscht
Bezahlung in Bar gewünscht
Terminal freischalten
Betrag entgegennehmen
Terminal freigegeben
Wechselgeld nötig
Betrag genau beglichen
Kunde steckt Karte ein und bestätigt Zahlung
Wechselgeld auszahlen
Rechnung beglichen
Rechnung aushändigen
Bezahlung abgeschlossen

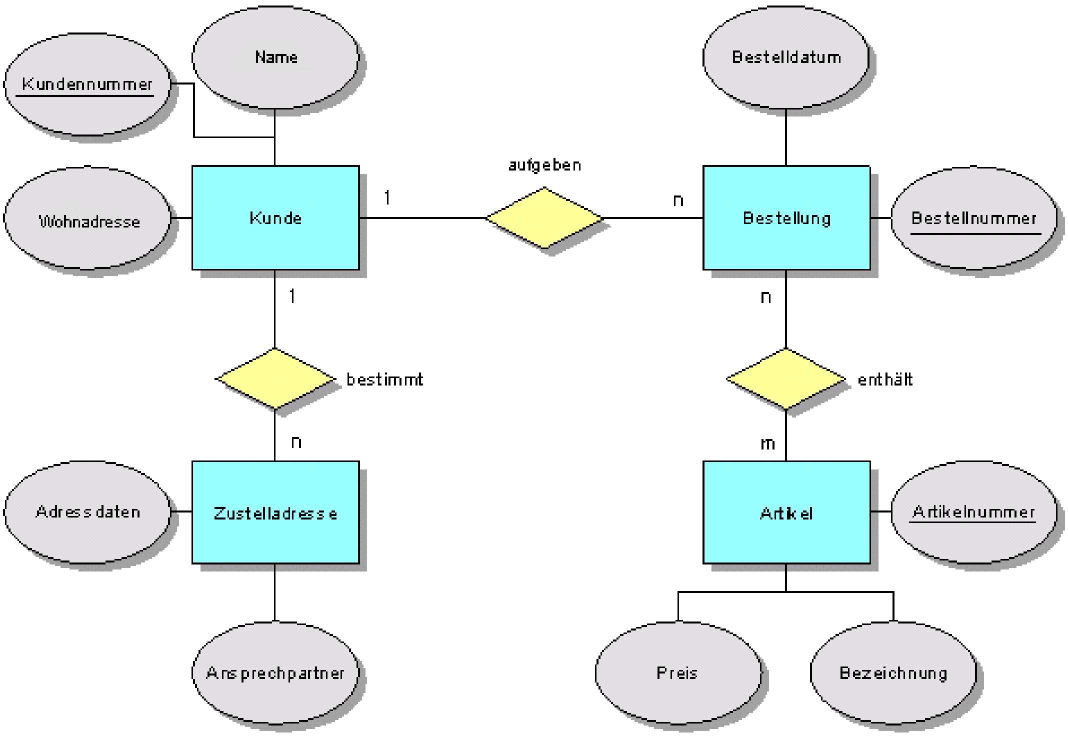
Beispiel 4.5


Kunde ist beim Schalter
X
Bedarf ermitteln
V
Kunde hat Durst
Kunde hat Hunger
V
Bestellung erfassen
V
Getränk erfasst
Burger erfasst
Getränk holen
Burger holen
V
Waren am Tablett
weitere Wünsche ermitteln
X
Nein, keine weiteren Wünsche
Ja, weitere Wünsche
Bestellung abschließen
Bestellung abgeschlossen

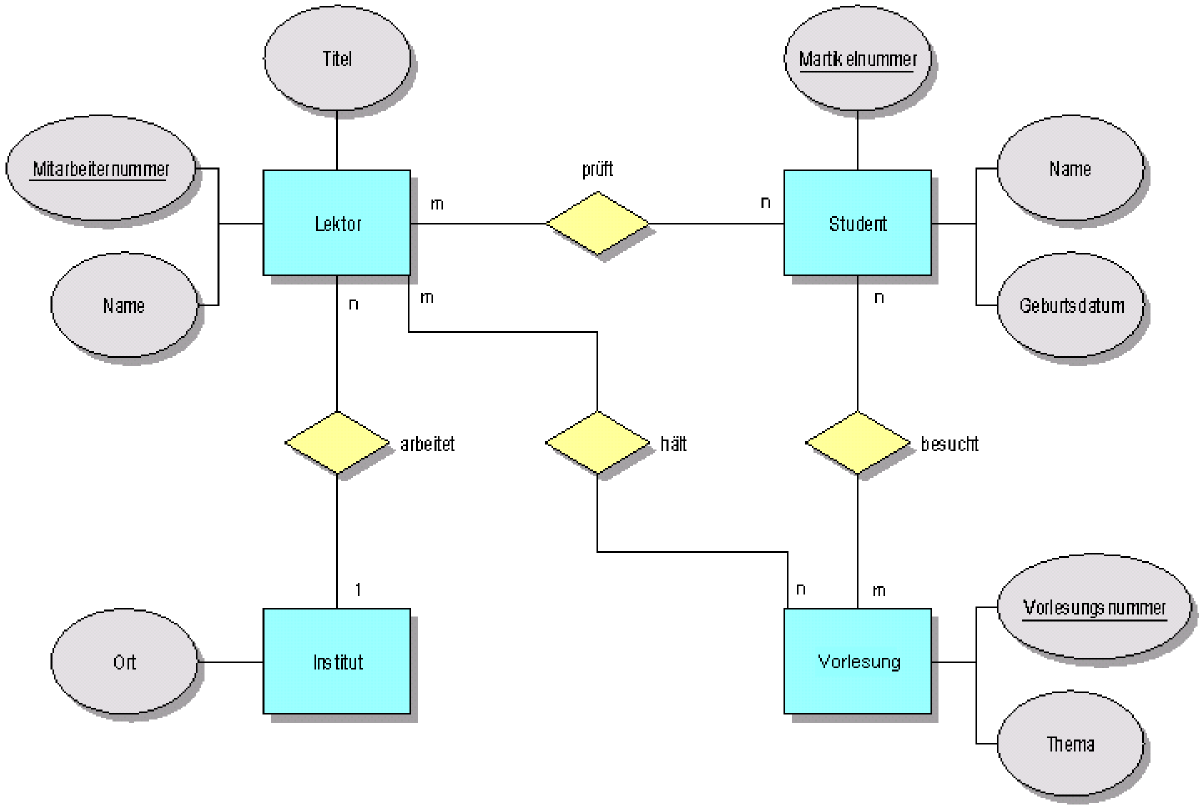
Beispiel 4.6



Beispiel 4.7



Beispiel 4.8


Titel
Martikelnummer
Mitarbeiternummer
Lektor
m
prüft
n
Student
Name
Name
Geburtsdatum
n
m
n
arbeitet
hält
besucht
1
n
m
Ort
Institut
Vorlesung
Vorlesungsnummer
Thema

5 Anhang

Standardnormalverteilung - Dichtefunktion f(z)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Standardnormalverteilung - Verteilungsfunktion F(x)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000