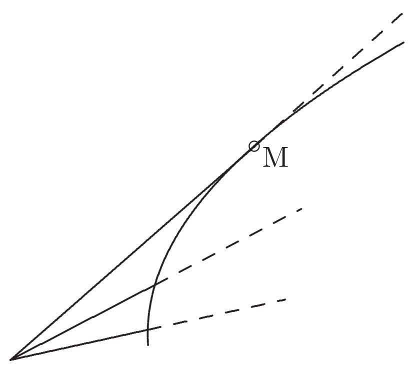
Analyse und Entscheidung im Finanzmanagement

Alois Geyer
WU Wirtschaftsuniversität Wien
Vienna Graduate School of Finance
alois.geyer@wu-wien.ac.at
http://www.wu-wien.ac.at/~geyer
http://www.wu-wien.ac.at/~geyer/courses/



© Alois Geyer 2009 – Some rights reserved.
Dieses Dokument unterliegt folgender Creative-Commons-Lizenz:
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/at/

Inhaltsverzeichnis

Ich möchte mich bei Matthias Bühlmaier, Hermann Elendner und Markus Hochradl für wertvolle Hinweise im Rahmen der Überarbeitung des Skriptums bedanken.

1 Berechnung von Renditen

1.1 Stetige und diskrete Renditen

Renditen und deren statistische Eigenschaften bilden die Basis für sehr viele finanzwirtschaftliche Modelle und Anwendungen. Es gibt mehrere Möglichkeiten Renditen aus Preisen (oder Indizes) von Aktien oder Anleihen zu berechnen. **Stetige Renditen** (*log returns*) werden auf Basis der *logarithmierten Preisänderung* berechnet:

$$y_t = \ln p_t - \ln p_{t-1} = \ln \frac{p_t}{p_{t-1}}.$$

p_t ist der Preis, Kurs oder Indexwert zum Zeitpunkt t. Diese Berechnung entspricht einer stetigen Verzinsung des Kapitals.

Diskrete Renditen (*simple returns*) werden auf Basis der *relativen Wertänderung* zwischen t–1 und t berechnet:

$$r_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = \frac{p_t}{p_{t-1}} - 1.$$

Diese Berechnung entspricht einer diskreten Verzinsung des Kapitals; d.h. Zinsen werden dem Kapital in bestimmten zeitlichen Abständen zugeschrieben. Bei der stetigen Verzinsung geht die Länge des Zeitintervalls gegen null.

Zwischen stetigen und diskreten Renditen bestehen folgende Beziehungen:

$$y_t = \ln(1 + r_t) \qquad r_t = \exp\{y_t\} - 1. \tag{1}$$

Die diskrete Rendite eines Portfolios aus m Wertpapieren ist ein gewichteter Durchschnitt der diskreten Renditen der einzelnen Wertpapiere:

$$r_{p,t} = \sum_{i=1}^{m} w_i r_{it} \tag{2}$$

wobei w_i das Gewicht von Wertpapier i im Portfolio ist. Für stetige Renditen gilt diese Beziehung annähernd:

$$y_{p,t} \approx \sum_{i=1}^{m} w_i y_{it}. \tag{3}$$

In einigen Modellen und Anwendungen werden mehrperiodige Renditen und deren statistischen Eigenschaften betrachtet (Aggregation über die Zeit). Die stetige (mehrperiodige) Rendite über h Perioden ($\ln p_t$–$\ln p_{t-h}$) ist die Summe über h einperiodige Renditen:

$$\ln p_t - \ln p_{t-h} = \ln(p_t/p_{t-1}) + \ln(p_{t-1}/p_{t-2}) + \cdots + \ln(p_{t-h+1}/p_{t-h})$$

$$y_t(h) = y_t + y_{t-1} + \cdots + y_{t-h+1}.$$

Die entsprechende Formel für diskrete Bruttorenditen $(1 + r_t)$ lautet

$$p_t/p_{t-h} = (p_t/p_{t-1})(p_{t-1}/p_{t-2}) \cdots (p_{t-h+1}/p_{t-h})$$

$$1 + r_t(h) = (1 + r_t)(1 + r_{t-1}) \cdots (1 + r_{t-h+1}) = \prod_{j=0}^{h-1}(1 + r_{t-j}).$$

Je nach Problemstellung werden in der Literatur typischerweise stetige oder diskrete Renditen verwendet. Das kann vor allem dadurch erklärt werden, dass die beiden Definitionen unterschiedliche mathematische Eigenschaften bei Aggregation über die Zeit oder im Kontext von Portfolios (Aggregation über mehrere Wertpapiere) haben. Wir werden in den folgenden Kapiteln jeweils die Definition verwenden, die in der Literatur üblicherweise zu finden ist.

Betrachtet man graphische Darstellungen von stetigen und diskreten Renditen ist (zumindest optisch) kein Unterschied zu bemerken. Allerdings gilt immer $y_t < r_t$, was der unterschiedlichen Annahme über die Verzinsung entspricht. Problematisch kann jedoch die Ermittlung von durchschnittlichen Renditen auf Basis des arithmetischen Mittels werden.

Das arithmetische Mittel aus n stetigen Renditen $y_1, \ldots, y_n$ wird mit Hilfe von

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} y_t$$

geschätzt. $\bar{y}$ entspricht der durchschnittlichen Rendite und ist ein unverzerrtes Maß für die durchschnittliche Verzinsung des Kapitals. Das arithmetische Mittel der diskreten Renditen $\bar{r}$ ist hingegen immer *nach oben verzerrt*. Eine korrekte Berechnung erfolgt mit dem **geometrischen Mittel** auf Basis des Produkts von diskreten Bruttorenditen:

$$\tilde{r} = [(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdots (1 + r_n)]^{1/n} - 1.$$

Der Unterschied zwischen $\bar{y}$ und $\tilde{r}$ ist nur auf die unterschiedliche Annahmen über die Verzinsung zurückzuführen.

Wiederholung:[1] Eine Zufallsvariable X ist **lognormal**verteilt, wenn $Y = \ln X$ normalverteilt ist. Daraus folgt: wenn $Y \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ dann ist $X = \exp\{Y\}$ lognormalverteilt. Der Erwartungswert von X beträgt

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[\exp\{Y\}] = \exp\{\mu + 0.5\sigma^2\}.$$

Daraus folgt:

$$\ln \mathrm{E}[X] = \mu + 0.5\sigma^2 = \mathrm{E}[\ln X] + 0.5\mathrm{V}[\ln X]. \tag{4}$$

Unter der Annahme der Normalverteilung für stetige Renditen gilt

$$\bar{r} = \exp\{\bar{y} + 0.5s^2\} - 1 \qquad \bar{y} = \ln(1 + \bar{r}) - 0.5s^2, \tag{5}$$

wobei s^2 die Varianz von y_t ist:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2.$$

Beispiel 1: Der Mittelwert der stetigen Renditen des FTSE (monatliche Daten von Januar 1965 bis Dezember 1990) beträgt $\bar{y}$=0.00765, während man aus diskreten Renditen $\bar{r}$=0.00986 und $\tilde{r}$=0.00768 erhält. Die Standardabweichung von y_t beträgt 0.0653. Die Beziehung (5) trifft annähernd zu: $\exp\{0.00765{+}0.5{\cdot}0.0653^2\}{-}1 \approx 0.00983$.

Wir vergleichen nun ex-post und ex-ante Implikationen von $\bar{y}$, $\bar{r}$ und $\tilde{r}$. Im Januar 1965 beträgt der Index p_0=105.4. Mit Hilfe von $\bar{y}$ und stetiger Verzinsung beträgt der Index in t

$$p_t = p_0 \exp\{\bar{y}t\} = 105.4 \exp\{0.00765t\}.$$

[1] Für Details siehe Hastings/Peacock[8], S.84.

Damit erhält man 1137.75 für Dezember 1990 (t=311), was genau dem beobachteten Wert des FTSE entspricht. Mit $\bar{r}$ und diskreter Verzinsung gilt

$$p_t = p_0(1+\bar{r})^t = 105.4(1+0.009859)^t,$$

woraus p_{311}=2228.06 resultiert. Wenn man $\tilde{r}$ anstelle von $\bar{r}$ verwendet, erhält man ebenfalls den korrekten Wert 1137.75. Im Nachhinein ergeben daher nur $\bar{y}$ oder $\tilde{r}$ eine korrekte Abbildung des durchschnittlichen Kursverlaufs.

Für eine *Prognose* des Kurses (d.h. für eine Berechnung des *erwarteten* Kurses zu einem zukünftigen Zeitpunkt), die auf dem historischen geschätzten Mittelwert $\bar{y}$ und der Annahme einer Normalverteilung von y_t beruht, werden die Formeln

$$\mathrm{E}[p_{t+h}] = p_t \exp\{h(\bar{y}+0.5s^2)\} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{E}[p_{t+h}] = p_t(1+\bar{r})^h$$

verwendet. Für h=5 erhält man 1137.75exp{5(0.00765+0.5·0.0653²)}=1194.76 bzw. 1137.75(1+0.00986)⁵=1194.95.

1.2 Empirische Eigenschaften von Renditen

In vielen finanzwirtschaftlichen Modellen und Theorien werden folgende Annahmen getroffen: Renditen sind normalverteilt, nicht autokorreliert und haben konstante Varianz. Zahlreiche empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass Renditen auf Finanzmärkten nicht normalverteilt sind und keine konstante Varianz aufweisen. Sie sind jedoch meist unkorreliert.

Normalverteilung

Die folgenden beiden Kennzahlen können Abweichungen von der Normalverteilung anzeigen. Die **Schiefe**

$$S = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{(y_t-\bar{y})^3}{s^3}$$

ist eine Maßzahl für die Symmetrie des Histogramms. Sie ist ein Indikator und hat keine Maßeinheiten. Eine Normalverteilung ist symmetrisch und hat eine Schiefe von null. Wenn die Schiefe negativ ist, dann verläuft der linke Ast des Histogramms flacher als der rechte Ast. Eine Verteilung mit negativer (positiver) Schiefe wird als linksschief (rechtsschief) bezeichnet. Vereinfacht gesagt liegen bei negativer Schiefe mehr negative als positive Extremwerte vor.

Ein zweites wichtiges Maß zur Beurteilung der Form des Histogramms ist die **Kurtosis** (oder **Wölbung**). Sie wird mit Hilfe von

$$U = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{(y_t-\bar{y})^4}{s^4}$$

geschätzt. Auch die Kurtosis ist ein Indikator und hat keine Maßeinheiten. Die Kurtosis einer Normalverteilung beträgt drei. Weicht die Kurtosis von drei ab, liegt kein 'normaler' Verlauf des Histogramms vor. Daten werden als **leptokurtisch** bezeichnet, wenn das Histogramm stark um den Mittelwert konzentriert ist (d.h. stärker als 'normal'). Damit korrespondiert eine große Häufigkeit für extreme Werte (so genannte *fat tails*). Diese Eigenschaft liegt vor, sobald die Kurtosis größer als 3 ist. Wenn die Kurtosis kleiner als drei ist, liegt eine **platokurtische** Verteilung vor, die nicht stark um den Mittelwert konzentriert ist.

In einer Stichprobe werden die Schätzwerte von Schiefe und Kurtosis immer von null bzw. drei abweichen. Um zu überprüfen, ob sich die Schiefe signifikant von null unterscheidet, kann man das 95% Konfidenzintervall $\pm 1.96\sqrt{6/n}$ verwenden. Für die Kurtosis beträgt das 95% Konfidenzintervall $3 \pm 1.96\sqrt{24/n}$. Die Normalverteilung der Residuen kann auch anhand des **Jarque-Bera Tests** überprüft werden. Dieser Test beruht auf der Nullhypothese der Normalverteilung und berücksichtigt sowohl Schiefe als auch Kurtosis:

$$\mathrm{JB} = \frac{n}{6}\left[S^2 + \frac{1}{4}(U-3)^2\right].$$

Die Teststatistik JB ist χ^2-verteilt mit zwei Freiheitsgraden.

> **Beispiel 2:** Die Schiefe der Renditen des FTSE aus Beispiel 1 beträgt 0.67. Daraus folgt, dass extreme positive Renditen tendenziell überwiegen. Das 95% Konfidenzintervall beträgt im vorliegenden Fall ±0.27. Daher ist die Schiefe von 0.67 signifikant von null verschieden und die Renditen werden auf Basis dieses Indikators nicht als normalverteilt beurteilt. Die Kurtosis beträgt 13.19 – ein deutlicher Hinweis dafür, dass die Renditen nicht normalverteilt, sondern leptokurtisch sind. Das 95% Konfidenzintervall der Kurtosis beträgt im vorliegenden Fall [2.46;3.54]. Daher weicht die Kurtosis von 13.19 signifikant von drei ab und die Renditen werden auch auf Basis dieses Indikators nicht als normalverteilt beurteilt. Schließlich bestätigt der JB-Test 1367.54 mit einem P-Wert deutlich kleiner als 0.001 diese Schlussfolgerungen.

Autokorrelation

Mit Hilfe einer **Autokorrelationsanalyse** wird untersucht, ob systematische Abhängigkeiten innerhalb einer Zeitreihe – einer zeitlich geordneten Folge von Beobachtungen – vorliegen. Autokorrelation bezeichnet die Korrelation zwischen einer Zeitreihe und derselben, zeitlich verzögerten Zeitreihe. Der Autokorrelationskoeffizient ρ_1 zum *Lag* 1 (entspricht einer Verzögerung um eine Zeiteinheit) gibt an, wie groß die Korrelation zwischen den Renditen y_t und y_{t-1} ist. Allgemein gilt für Lag k:

$$\rho_k = \mathrm{corr}[y_t, y_{t-k}].$$

Die Analyse erfolgt auf Basis einer Reihe von geschätzten Autokorrelationskoeffizienten $\rho_1, \ldots, \rho_k$, die in einem **Autokorrelogramm** dargestellt werden. Eine Zeitreihe, die *nicht* autokorreliert ist, wird als **White-Noise** bezeichnet. Zur Beurteilung der Signifikanz von geschätzten Autokorrelationen kann das 95% Konfidenzintervall $\pm 1.96/\sqrt{n}$ verwendet werden. Dieses Intervall ist jedoch nur dann adäquat, wenn die Varianz der Renditen konstant ist (siehe unten) – was für Renditen üblicherweise nicht zutrifft. Zur Berücksichtigung dieses Umstands muss das Intervall entsprechend vergrößert werden.

> **Beispiel 3:** Die Autokorrelationen der FTSE Renditen für die Lags 1 bis 5 betragen 0.113, –0.103, 0.093, 0.061 und –0.102. Das 95% Konfidenzintervall beträgt $\pm 1.96/\sqrt{311} = \pm 0.111$. Daher ist in diesem Fall nur ρ_1 knapp signifikant. Wenn allerdings berücksichtigt wird, dass die Renditen keine konstante Varianz aufweisen (siehe Beispiel 4) ist keine der Autokorrelationen signifikant und FTSE Renditen werden als White-Noise beurteilt.

Konstante Varianz

Eine andere Art der systematischen Abhängigkeit zwischen Renditen kommt vor allem bei der Betrachtung von täglichen Daten zum Ausdruck. Man kann häufig feststellen, dass die Schwankungsbreite der Renditen im Zeitablauf unterschiedlich groß ist. Die Schwankungsbreite wird üblicherweise als **Volatilität** bezeichnet und mit der Standardabweichung gemessen. Der Umstand, dass länger andauernde Phasen hoher Volatilität und geringer Volatilität auftreten, wird mit dem Begriff **Volatility Clustering** bezeichnet. Dass die Varianz im Zeitablauf nicht konstant ist kann auch dazu beitragen, dass die Renditen nicht normalverteilt sind. Zur Überprüfung dieser Eigenschaft kann man die Autokorrelationen der Absolutbeträge der Renditen oder quadrierter Renditen verwenden.

Beispiel 4: Für die ersten fünf Lags der absoluten FTSE Renditen erhält man die Autokorrelationen 0.212, 0.192, 0.089, 0.142 und 0.186. Alle Werte sind positiv, was zum Ausdruck bringt, dass benachbarte, absolute Renditen ähnlich groß sind. Das kann als Hinweis auf das Bestehen von Volatility Clustering angesehen werden. Vier dieser Werte liegen außerhalb des 95% Konfidenzintervalls ± 0.111, so dass der Schluss gezogen werden kann, dass die Varianz der Renditen des FTSE nicht konstant ist.

Aufgabe 1: Erheben Sie Kurse für drei Aktien von `finance.yahoo.com` oder einer anderen Quelle und untersuchen Sie die Renditen auf Normalverteilung, Autokorrelation und konstante Varianz.

2 Entscheidung unter Risiko

2.1 Ein grundlegendes Entscheidungsproblem

Wir betrachten die Entscheidung eines Investors, der einen Teil seines Vermögens am Kapitalmarkt (z.B. in einen Aktienfonds) für *eine* Periode (z.B. ein Jahr) veranlagen will. Sein aktuell verfügbares Vermögen beträgt w_0. Er beabsichtigt den – noch zu bestimmenden – Betrag X zu investieren. Der aktuelle Kurs des Aktienfonds beträgt P_0. Der Kurs P am Ende der nächsten Periode ist unsicher, seine Rendite (prozentuelle Wertänderung) $R{=}P/P_0{-}1$ kann jedoch durch die normalverteilte Zufallsvariable $R{\sim}\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ beschrieben werden. Der verbleibende Betrag $w_0{-}X$ wird nicht riskant veranlagt und erzielt eine sichere Rendite von r_f.

Wenn der Investor den Betrag X investiert, beträgt sein Endvermögen am Ende der Periode

$$W = (w_0 - X)(1 + r_f) + X(1 + R) = w_0(1 + r_f) + X(R - r_f).$$

Aufgrund der unsicheren Wertänderung R ist auch W unsicher und somit eine Zufallsvariable. Je nach Realisierung von R (und Wahl von X) resultiert ein anderes Vermögen W. Das Entscheidungsproblem des Investors – "Welcher Betrag X soll investiert werden?" – kann unter Verwendung verschiedener Kriterien oder Zielfunktionen gelöst werden (z.B. Maximierung des Erwartungswerts). Wir betrachten die Lösung anhand einer Nutzenfunktion $U(W)$. Es gibt eine Reihe von Nutzenfunktionen, die für diesen Zweck verwendet werden können. Wir betrachten zunächst eine **exponentielle** Nutzenfunktion der Form

$$U(W) = -\exp\{-\lambda W\} \qquad \lambda > 0.$$

In Kapitel 2.2 werden wir andere Nutzenfunktionen betrachten. Vorläufig merken wir an:[2]

1. Der Nutzen nimmt mit zunehmendem Vermögen zu ($U'(W) > 0$).
2. Der Parameter λ bestimmt die Risikoeinstellung des Investors. Positive Werte von λ implizieren, dass der Investor risikoavers ist.

In Abhängigkeit von X (vom Investor beeinflussbar) und R (nicht beeinflussbar) entsteht jeweils ein anderer (ex-post) Nutzen. Die optimale Wahl von X muss daher so getroffen werden, dass der **Erwartungsnutzen** (der erwartete Nutzen) maximiert wird:

$$\mathrm{E}[U(W)] = -\mathrm{E}[\exp\{-\lambda W\}] = -\mathrm{E}[\exp\{-\lambda[w_0(1 + r_f) + X(R - r_f)]\}] \longrightarrow \max.$$

Wenn R normalverteilt ist, dann ist auch W normalverteilt, da W eine lineare Funktion von R ist. Wenn W normalverteilt ist, dann ist $\exp\{-\lambda W\}$ lognormalverteilt mit Erwartungswert:

$$\mathrm{E}[\exp\{-\lambda W\}] = \exp\{-\mathrm{E}[\lambda W] + 0.5\mathrm{V}[\lambda W]\}.$$

Der Erwartungsnutzen für die exponentielle Nutzenfunktion ist daher wie folgt definiert:

$$\mathrm{E}[U(W)] = -\exp\{-\lambda\mathrm{E}[W] + 0.5\lambda^2\mathrm{V}[W]\}.$$

[2] Weitere Eigenschaften werden in Kapitel 2.2 betrachtet.

Erwartungswert und Varianz des Vermögens W sind

$$\mathrm{E}[W] = w_0(1 + r_f) + X(\mu - r_f)$$

$$\mathrm{V}[W] = X^2\sigma^2,$$

wobei μ und σ^2 Erwartungswert und Varianz von R sind. Die Zielfunktion für das Entscheidungsproblem lautet daher

$$-\exp\{-\lambda[w_0(1 + r_f) + X(\mu - r_f)] + 0.5\lambda^2X^2\sigma^2\} \longrightarrow \max .$$

Zur Herleitung der optimalen Lösung verwenden wir den Umstand, dass die Funktionen $-\exp\{-a-bx+cx^2\}$ und $bx-cx^2$ beide das Maximum an der Stelle $x^*=b/2c$ haben. Zur Vereinfachung maximieren wir daher die Funktion

$$\lambda X(\mu - r_f) - 0.5\lambda^2X^2\sigma^2 = X(\mu - r_f) - 0.5\lambda X^2\sigma^2 \longrightarrow \max$$

und erhalten aus der ersten Ableitung $(\mu-r_f)-\lambda X\sigma^2=0$:

$$X^* = \frac{\mu - r_f}{\lambda\sigma^2}.$$

Der Erwartungsnutzen $\mathrm{E}[U(W)]$ kann daher maximiert werden, indem der Ausdruck

$$\mathrm{E}[W] - 0.5\lambda\mathrm{V}[W] = w_0(1 + r_f) + X(\mu - r_f) - 0.5\lambda X^2\sigma^2 \tag{6}$$

maximiert wird (der additive Term $w_0(1+r_f)$ in der Definition von $\mathrm{E}[W]$ hat für die Optimierung keine Bedeutung). Dieser Ausdruck entspricht zwar nicht dem Erwartungsnutzen, wird aber meist bevorzugt, weil diese Zielfunktion (intuitiv) einfacher zu interpretieren ist. Der Betrag X wird demnach so gewählt, dass das erwartete Vermögen abzüglich eines Strafterms maximiert wird, der umso größer ist, je größer die Risikoaversion und die Varianz des (unsicheren) Vermögens ist. Die optimale Lösung ist ebenfalls $X^*=(\mu-r_f)/\lambda\sigma^2$.

Bemerkenswert ist, dass die optimale Lösung *unabhängig* vom Ausgangsvermögen w_0 ist. Das ist eine charakteristische Eigenschaft der exponentiellen Nutzenfunktion die in Kapitel 2.2 genauer behandelt wird. Dort wird auch die Bedeutung des Parameters λ verdeutlicht, der die Risikoaversion des Investors reflektiert. Typischerweise bewegt sich λ im Bereich zwischen 0.5 und 20.

Beispiel 5: Für μ=0.07, σ=0.2 und r_f=0.02 sind die optimalen Werte für X in Abhängigkeit von λ in der folgenden Tabelle angegeben:

λ	0.5	1	2	3	4	5
X^*	2.5000	1.2500	0.6250	0.4167	0.3125	0.2500

2.2 Nutzenfunktionen

Wir untersuchen nun, welche Auswirkungen die Wahl der Nutzenfunktion auf die Lösung des Entscheidungsproblem hat und wodurch sich verschiedene Nutzenfunktionen unterscheiden.

Die üblichen Anforderungen an eine Nutzenfunktion sind:

1. Die Nutzenfunktion soll abbilden, wie sich die Präferenzen des Investors bei Änderungen im Vermögen ändern.

2. Der Nutzen soll mit zunehmendem Vermögen steigen ($U'(W) > 0$).

3. Die Nutzenfunktion soll die Risikoeinstellung des Entscheidungsträgers abbilden. Auf Basis der zweiten Ableitung $U''(W)$ werden drei Möglichkeiten unterschieden: er kann risikoavers, risikoneutral und risikofreudig sein.

2.2.1 Risikoaversion

Wiederholung: Die Ungleichung von Jensen besagt: für den Erwartungswert einer Zufallsvariablen X und eine konvexe Funktion $f(x)$ gilt die Beziehung

$$f(\mathrm{E}[X]) \leq \mathrm{E}[f(X)].$$

Risikoaversion kann auf Basis einer Nutzenfunktion $U(W)$ für die Zufallsvariable W definiert werden. Risikoaversion liegt vor, wenn der Nutzen des Erwartungswerts von W größer ist, als der erwartete Nutzen (Erwartungsnutzen) von W:

$$U(\mathrm{E}[W]) > \mathrm{E}[U(W)].$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Nutzenfunktion *konkav* ist. Risikoaversion ist daher durch eine negative zweite Ableitung der Nutzenfunktion gekennzeichnet ($U''(W)<0$). Bei Risikoneutralität gilt $U''(W)=0$ und bei Risikofreudigkeit $U''(W)>0$.

Beispiel 6: Die Teilnahme an einem Glücksspiel kostet 5 GE, wobei man mit je 50% Wahrscheinlichkeit entweder 10 oder gar nichts gewinnt. Es handelt sich um ein so genanntes **faires Spiel**, weil die Kosten gleich hoch wie der erwartete Gewinn sind. Man ist risikoavers, wenn man ein faires Spiel *ablehnt* (d.h. den Einsatz behält und nicht spielt). Der Nutzen des Erwartungswerts $U(5)$ ist bei Risikoaversion größer als der Erwartungswert des Nutzens $0.5U(10) + 0.5U(0)$.

2.2.2 Absolute und relative Risikoaversion

Die Nutzenfunktion soll zeigen, wie sich die Präferenzen des Investors bei Änderungen im Vermögen ändern. Angenommen ein Investor verfügt über 100000 GE und hat 1000 GE riskant veranlagt. Was passiert, wenn sein Vermögen auf 200000 GE steigt? Wird er denselben, einen geringeren oder eine höheren Geldbetrag investieren? Diese Entscheidung hängt von der **absoluten Risikoaversion** oder dem **Arrow-Pratt Maß** $A(W)$ ab:

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}.$$

Eine konkave Nutzenfunktion (d.h. Risikoaversion) impliziert $A(W)>0$. $A(W)$ ist ein Maß für die Konkavität der Nutzenfunktion an der Stelle W. Es erfasst alle wichtigen Eigenschaften der Nutzenfunktion. Der Kehrwert von $A(W)$ wird als **Risikotoleranz** $T(W)=1/A(W)$ bezeichnet.

Es können folgende Fälle unterschieden werden:

1. zunehmende absolute Risikoaversion: wenn das Vermögen steigt, sinkt der riskant veranlagte Geldbetrag.
2. gleichbleibende absolute Risikoaversion: wenn das Vermögen steigt, bleibt der riskant veranlagte Geldbetrag gleich. Das gilt für CARA (*constant absolute risk aversion*) Nutzenfunktionen (Beispiel: exponentielle Nutzenfunktion).
3. abnehmende absolute Risikoaversion: wenn das Vermögen steigt, steigt der riskant veranlagte Geldbetrag (Beispiel: logarithmische Nutzenfunktion).

Wenn man nicht den investierten Geldbetrag, sondern den *Prozentsatz* des investierten Vermögens untersucht, dann ist die **relative Risikoaversion**

$$A_R(W) = W \cdot A(W)$$

das relevante Unterscheidungsmerkmal. Es können folgende Fälle unterschieden werden:

1. zunehmende relative Risikoaversion: wenn das Vermögen steigt, sinkt der riskant veranlagte Prozentsatz des Vermögens (Beispiele: exponentielle und quadratische Nutzenfunktion).
2. gleichbleibende relative Risikoaversion: wenn das Vermögen steigt, bleibt der riskant veranlagte Prozentsatz des Vermögens gleich (Beispiel: logarithmische Nutzenfunktion).
3. abnehmende relative Risikoaversion: wenn das Vermögen steigt, steigt der riskant veranlagte Prozentsatz des Vermögens.

Meist werden abnehmende absolute und zunehmende relative Risikoaversion als wünschenswert erachtet.

Bevor eine Entscheidung getroffen werden kann, muss der Investor eine funktionale Form und die Parameter der Nutzenfunktion so wählen, dass sie seinen Präferenzen entspricht. Die folgenden Nutzenfunktionen[3] werden häufig verwendet:

1. Die **exponentielle** Nutzenfunktion

   $$U(W) = -\exp\{-\lambda W\} \qquad A(W) = \lambda \quad A_R(W) = \lambda W \quad \lambda > 0$$

   hat *konstante* absolute Risikoaversion gleich λ. Die Entscheidungen sind daher *unabhängig* von w_0 und hängen nur von λ ab. Man kann allerdings durch die Wahl von $\lambda^*=\lambda/w_0$ (d.h. A_R ist konstant) erreichen, dass der riskant veranlagte *Prozentsatz* des Vermögens konstant ist.

2. Die **quadratische** Nutzenfunktion

   $$U(W) = W - \frac{\beta}{2}W^2 \qquad A(W) = \frac{\beta}{1-\beta W} \quad A_R(W) = \frac{\beta W}{1-\beta W} \quad \beta < 1/W$$

   impliziert eine mit W *steigende* absolute und relative Risikoaversion. Je größer das Vermögen, desto kleiner ist der Geldbetrag *und* daher der Prozentsatz der riskant veranlagt wird. Ein Nachteil der quadratischen Nutzenfunktion besteht darin, dass der Grenznutzen für $W>1/\beta$ negativ wird.

[3] Alle angeführten Nutzenfunktionen zählen zur Klasse der HARA (*hyperbolic absolute risk aversion*) Nutzenfunktionen. Spezialfälle dieser Funktionen sind CARA Nutzenfunktionen und Funktionen mit steigender, gleichbleibender bzw. abnehmender relativer Risikoaversion.

Tab.1: Verhalten bei Zunahme des Vermögens.

Nutzenfunktion	$A(W)$ absolute Risikoaversion	riskanter Geldbetrag	$A_R(W)$ relative Risikoaversion	riskanter Prozentsatz
exponentiell $-\exp\{-\lambda W\}$	λ konstant	konstant	λW steigt mit W	sinkt
quadratisch $W-0.5\beta W^2$	$\beta/(1-\beta W)$ steigt mit W	sinkt	$\beta W/(1-\beta W)$ steigt mit W	sinkt
isoelastisch $W^{1-\gamma}/(1-\gamma)$	γ/W sinkt mit W	steigt	γ	konstant

3. Die **isoelastische** Nutzenfunktion (oder Potenzfunktion) hat eine abnehmende absolute Risikoaversion und eine relative Risikoaversion, die konstant gleich γ ist:

$$U(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \qquad A(W) = \frac{\gamma}{W} \quad A_R = \gamma \quad \gamma > 0.$$

Daher bleibt der riskant investierte Prozentsatz bei Änderung des Anfangsvermögens gleich (der entsprechende Geldbetrag steigt).

Ein Spezialfall der isoelastischen Nutzenfunktionen ist die **logarithmische** Nutzenfunktion mit $\gamma\to 1$:

$$U(W) = \ln W \qquad A(W) = \frac{1}{W} \quad A_R = 1.$$

Die Eigenschaften verschiedener Nutzenfunktionen bei Änderungen im Vermögen sind in Tab.1 zusammengefasst.

Beispiel 7: Unter Verwendung der Angaben aus Beispiel 5 für die Rendite des Wertpapiers und λ=4 erhält man folgende (numerisch optimierten) Werte für X^* in Abhängigkeit von Anfangsvermögen w_0 und Nutzenfunktion:

	w_0=1	w_0=2	w_0=4
exponentiell λ=4	0.321	0.321	0.321
quadratisch β=0.8	0.273	–0.938	–3.361
isoelastisch γ=4	0.328	0.657	1.314

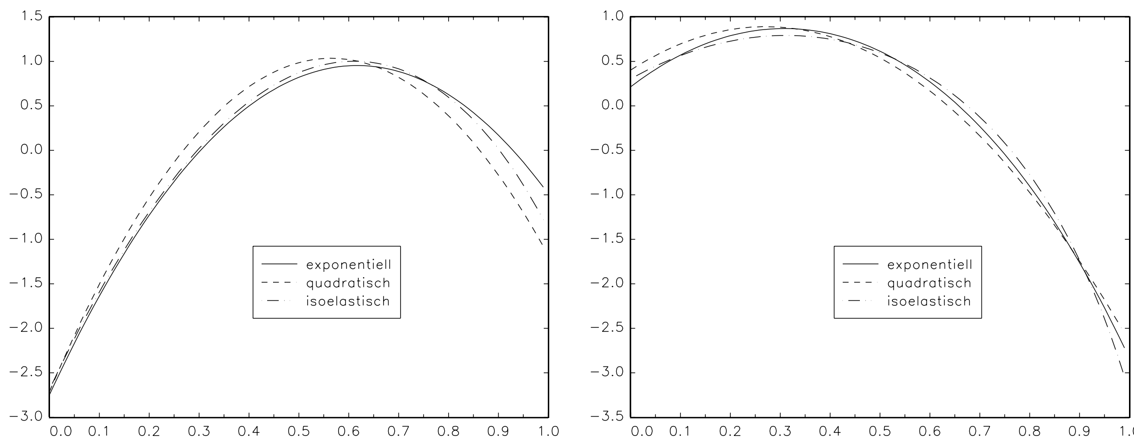
Die Wahl von β=0.8 wird in Kapitel 2.2.3 erläutert. Die optimale veranlagten Beträge verhalten sich entsprechend Tab.1. Sobald $w_0>1/\beta(1+r_f)$ wird X^* bei quadratischer Nutzenfunktion negativ.

2.2.3 Vergleiche zwischen Nutzenfunktionen

In Kapitel 2.2.2 haben wir untersucht, wie sich die optimal veranlagten Beträge bei Änderungen im Anfangsvermögen für verschiedene Nutzenfunktionen verhalten. Nun fragen wir, wie Nutzenfunktionen sinnvoll miteinander verglichen werden können. Dazu halten wir zunächst die absolute und anschließend die relative Risikoaversion konstant.

Für einen Vergleich zwischen exponentieller und quadratischer Nutzenfunktion wählen wir β so, dass die absolute Risikoaversion der beiden Nutzenfunktionen für ein gegebenes

Abb.1: Erwartungsnutzen in Abhängigkeit von X für λ=2 (links) und λ=4 (rechts).



w_0 identisch ist. Durch Gleichsetzen der absoluten Risikoaversion der beiden Funktionen erhält man

$$\frac{\beta}{1-\beta w_0} = \lambda \qquad \Longrightarrow \qquad \beta^* = \frac{\lambda}{1+\lambda w_0}. \tag{7}$$

Analog wird der Parameter γ der isoelastischen Nutzenfunktion so gewählt, dass die absolute Risikoaversion für ein gegebenes w_0 gleich λ ist:

$$\frac{\gamma}{w_0} = \lambda \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma^* = \lambda w_0. \tag{8}$$

Wenn als Ausgangspunkt eine exponentielle Nutzenfunktion mit Parameter λ verwendet wird, dann verhält sich eine quadratische mit Parameter β^* oder eine isoelastische Nutzenfunktion mit Parameter γ^* ähnlich (d.h. der optimale Betrag X^* ist ähnlich und die Lösung ist unabhängig von w_0).

Zur Illustration wird die Entscheidungssituation aus Beispiel 5 betrachtet. Für die Rendite der riskanten Anlage nehmen wir an $R \sim \mathrm{N}(0.07, 0.2^2)$ und r_f=0.02. In Abb.1 ist der Verlauf der Erwartungswerts des Nutzens[4] des Vermögens $W = w_0(1+r_f)+X(R-r_f)$ in Abhängigkeit von X für die drei Nutzenfunktionen unter Annahme von λ=2 sowie λ=4 dargestellt. Die Parameter der quadratischen und isoelastischen Nutzenfunktionen wurden gemäß der Gleichungen (7) und (8) für w_0=1 und gegebenes λ bestimmt. Man erkennt, dass die Auswahl des optimalen Anteils vor allem von der Risikoaversion bestimmt wird, während die gewählte Nutzenfunktion – *nach Anpassung der Parameter* – relativ wenig Bedeutung hat.[5]

Ähnlich verhält es sich im Fall von mehr als zwei Anlagen. Kallberg/Ziemba[11] haben gezeigt, dass sich Zusammensetzung von Portfolios aus zehn Wertpapieren bei unterschiedlichen Nutzenfunktionen kaum voneinander unterscheidet, wenn die Parameter der Nutzenfunktionen so gewählt werden, wie oben gezeigt.

[4] Die angegeben Werte für den Erwartungsnutzen sind standardisiert, um einen graphischen Vergleich zu ermöglichen.

[5] Eine noch größere Übereinstimmung des Kurvenverlaufs der einzelnen Nutzenfunktionen kann erzielt werden, wenn bei der Bestimmung von β^* und γ^* in den Gleichungen (7) und (8) w_0 durch den Erwartungswert von $w_0(\bar{X}R+(1-\bar{X})r_f)$ ersetzt wird, wobei z.B. $\bar{X}$=0.5 verwendet werden kann.

Bei exponentieller und quadratischer Nutzenfunktion verändert sich die optimale, prozentuelle Aufteilung X^*/w_0, wenn sich das Vermögen ändert. Wir können jedoch die Parameter dieser Nutzenfunktionen so anpassen, dass die relative Risikoaversion konstant gehalten wird (und damit dem Verhalten einer isoelastischen Funktion mit Parameter γ entsprechen). Bei der exponentiellen Nutzenfunktion wird λ durch $\lambda^*=\lambda/w_0=\gamma$ ersetzt. Damit die optimale Aufteilung bei quadratischer Nutzenfunktion unabhängig vom Anfangsvermögen ist, muss β entsprechend angepasst werden:

$$\frac{\beta w_0}{1-\beta w_0} = \gamma = \lambda^* \qquad \Longrightarrow \qquad \beta^* = \frac{\gamma}{w_0(1+\gamma)}.$$

Die optimale prozentuelle Aufteilung bei isolelastischer Nutzenfunktion ist unabhängig von w_0.

Aufgabe 2: Ermitteln Sie optimale Werte für X wie in Beispiel 7 anhand der Angaben aus Beispiel 5 für λ=1 und λ=2 sowie für w_0=3 und w_0=5. Wählen Sie die Parameter der Nutzenfunktion so, dass die absolute bzw. die relative Risikoaversion gleich gesetzt wird.

Aufgabe 3: Verwenden Sie die Angaben aus den Beispielen 5 und 7 und überprüfen Sie die nachfolgenden Aufgaben anhand von numerischen Lösungen.

1. Bestimmen Sie den Parameter λ der exponentiellen Nutzenfunktion so, dass der optimale Prozentsatz X^*/w_0 bei zunehmendem w_0 konstant bleibt.
2. Bestimmen Sie den Parameter β der quadratischen Nutzenfunktion so, dass der optimale Prozentsatz X^*/w_0 bei zunehmendem w_0 konstant bleibt.
3. Bestimmen Sie den Parameter γ der isoelastischen Nutzenfunktion so, dass der optimale Betrag X^* bei zunehmendem w_0 konstant bleibt.

2.2.4 μ-σ Analyse und Nutzenfunktionen

Wiederholung: Wir betrachten eine Zufallsvariable X und eine Konstante a. Für den Erwartungswert gilt:

$$\mathrm{E}[a+X] = a + \mathrm{E}[X] \qquad \mathrm{E}[aX] = a\mathrm{E}[X].$$

Für die Varianz gilt:

$$\mathrm{V}[a+X] = \mathrm{V}[X] \qquad \mathrm{V}[aX] = a^2\mathrm{V}[X].$$

Für die Varianz einer Zufallsvariable gilt:

$$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2\,.$$

In Kapitel 3 werden wir nur mehr die *prozentuelle* Aufteilung des Vermögens auf *mehrere* Anlagen betrachten. Wir werden die Grundlagen der **Mittelwert-Varianz Analyse** (oder μ-σ Analyse) darstellen, die auf Markowitz[12] zurückgeht. Die Zielfunktion bei dieser Betrachtungsweise beruht auf Erwartungswert und Varianz der (diskreten) Renditen eines Portfolios:

$$\mathrm{E}[R_p] - 0.5\lambda\mathrm{V}[R_p] = \mu_p - 0.5\lambda\sigma_p^2 \longrightarrow \max$$

Im Fall von einer riskanten und einer risikofreien Anlage definiert der Investor daher den *Bruchteil* x=$X/w0$ des Vermögens, der die Rendite R_p des Portfolios aus R und r_f bestimmt:

$$R_p = xR + (1 - x)r_f = r_f + x(R - r_f).$$

Die (diskrete) Rendite des Portfolios R_p ist eine gewichtete Summe[6] aus R und r_f. Das Vermögen ist gegeben durch

$$W = w_0(1 + R_p) = w_0(1 + r_f) + xw_0(R - r_f) \qquad x = X/w_0.$$

Die Optimierung der prozentuellen Aufteilung des Vermögens impliziert die Annahme einer konstanten relativen Risikoaversion (z.B. bei Verwendung einer isoelastischen Nutzenfunktion). Diese Betrachtungsweise ist aber auch dann gerechtfertigt, wenn der Parameter der exponentiellen Nutzenfunktion in Abhängigkeit von w_0 gewählt wird (mit λ=γ/w_0 bleibt der riskant veranlagte Prozentsatz gleich) oder w_0=1 gesetzt wird (in diesem Fall ist λ=γ). Wie oben gezeigt wurde, reicht bei Verwendung der exponentiellen Nutzenfunktion die Betrachtung von Erwartungswert und Varianz des Vermögens zur Maximierung des Erwartungsnutzens, wenn die diskreten Renditen normalverteilt sind. Für den Fall w_0=1 kann die Zielfunktion auf Basis der exponentiellen Nutzenfunktion (6) wie folgt angeschrieben werden:

$$\mathrm{E}[1 + R_p] - 0.5\lambda\mathrm{V}[1 + R_p] \longrightarrow \max.$$

Nach Entfernung des additiven Terms im Erwartungswert (der für die Maximierung irrelevant ist) und unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Varianz, lautet die Zielfunktion:

$$\mathrm{E}[R_p] - 0.5\lambda\mathrm{V}[R_p] \longrightarrow \max$$

und ist damit *identisch* mit der Zielfunktion nach Markowitz.

Welche Beziehung besteht zwischen der Zielfunktion nach Markowitz und der Verwendung einer isoelastischen Nutzenfunktion? In zweiten Fall lautet die Zielfunktion

$$\mathrm{E}[U(W)] = \frac{\mathrm{E}[W^{1-\lambda}]}{1 - \lambda} \longrightarrow \max.$$

Um dieses Optimierungsproblem lösen zu können, machen wir von einigen Vereinfachungen Gebrauch. Die Konstante $1-\lambda$ im Nenner hat für die Maximierung keine Bedeutung und kann daher weggelassen werden. Weiters ergibt die Maximierung des Logarithmus des Erwartungswerts dieselbe Lösung, wie die Maximierung des Erwartungswerts. Wir betrachten daher

$$\ln \mathrm{E}[W^{1-\lambda}] \longrightarrow \max.$$

Aus der Beziehung (4) wissen wir, dass $\ln \mathrm{E}[X]$=$\mathrm{E}[\ln X]$+$0.5\mathrm{V}[\ln X]$, wenn X lognormalverteilt ist. Wenn wir annehmen, dass W lognormalverteilt ist, lautet die Zielfunktion

$$\begin{aligned}\ln \mathrm{E}[W^{1-\lambda}] &= \mathrm{E}[\ln W^{1-\lambda}] + 0.5\mathrm{V}[\ln W^{1-\lambda}] \\ &= \mathrm{E}[(1 - \lambda)\ln W] + 0.5\mathrm{V}[(1 - \lambda)\ln W] \\ &= (1 - \lambda)\mathrm{E}[\ln W] + 0.5(1 - \lambda)^2\mathrm{V}[\ln W] \longrightarrow \max.\end{aligned}$$

[6]Diese Eigenschaft gilt für stetige Renditen nur annähernd.

Aus $W{=}w_0(1{+}R_p)$ folgt $\ln W{=}\ln w_0{+}\ln(1{+}R_p)$. Wir verwenden die Beziehung (1) und setzen $\ln(1{+}R_p){=}Y_p$. Daraus folgt

$$\mathrm{E}[\ln W] = \ln w_0 + \mathrm{E}[Y_p] \qquad \mathrm{V}[\ln W] = \mathrm{V}[\ln w_0 + Y_p] = \mathrm{V}[Y_p].$$

Die additive Konstante $\ln w_0$ kann bei der Maximierung ignoriert werden und die Zielfunktion durch $1{-}\lambda$ dividiert werden. Wir erhalten daher

$$\mathrm{E}[Y_p] + 0.5(1-\lambda)\mathrm{V}[Y_p] \longrightarrow \max .$$

Das Vermögen W ist lognormalverteilt (wie oben angenommen), wenn die stetige Rendite des Portfolios Y_p normalverteilt ist (was gleich bedeutend mit der Annahme einer Lognormalverteilung für die diskrete Rendite R_p ist). Wir können daher die Beziehung (5) $\mathrm{E}[Y_p]{=}\ln(1{+}\mathrm{E}[R_p]){-}0.5\mathrm{V}[Y_p]$ verwenden. Daraus folgt

$$\ln(1 + \mathrm{E}[R_p]) - 0.5\lambda\mathrm{V}[Y_p] \longrightarrow \max .$$

Für kleine Werte von R_p gilt für den ersten Term $\ln(1{+}\mathrm{E}[R_p]){\approx}\mathrm{E}[R_p]$. Außerdem unterscheiden sich die Varianzen von stetigen und diskreten Renditen nur geringfügig (d.h. $\mathrm{V}[Y_p]{\approx}\mathrm{V}[R_p]$). Die Zielfunktion auf Basis der Annahme einer isoelastischen Nutzenfunktion und normalverteilten stetigen Rendite des Portfolios Y_p entspricht daher *annähernd* der Zielfunktion nach Markowitz (die einer exponentiellen Nutzenfunktion mit $w_0{=}1$ und normalverteilten diskreten Renditen entspricht).

Wird eine quadratische Nutzenfunktion unterstellt und $w_0{=}1$ gesetzt, sodass $W{=}(1{+}R_p)$, erhalten wir

$$U(W) = W - 0.5\beta W^2 = 1 + R_p - 0.5\beta(1 + R_p)^2 = 1 - 0.5\beta + (1 - \beta)R_p - 0.5\beta R_p^2.$$

Für die Maximierung des Erwartungsnutzens können additive Terme ignoriert werden und die Zielfunktion lautet daher:

$$\mathrm{E}[U(W)] = (1 - \beta)\mathrm{E}[R_p] - 0.5\beta\mathrm{E}[R_p^2] \longrightarrow \max .$$

Nach Division mit $1{-}\beta$ und unter Berücksichtigung der Definition der Varianz erhalten wir die Zielfunktion:

$$\mathrm{E}[R_p] - 0.5\frac{\beta}{(1-\beta)}\Big(\mathrm{V}[R_p] + (\mathrm{E}[R_p])^2\Big) \longrightarrow \max .$$

Aus Gleichung (7) folgt, dass die (annähernde) Äquivalenz von exponentieller und quadratischer Nutzenfunktion $\lambda{=}\beta/(1{-}\beta)$ erfordert. Für kleine Werte von R_p ist $(\mathrm{E}[R_p])^2{\approx}0$. Eine quadratische Nutzenfunktion führt daher (nach Anpassung von β) zu *ähnlichen* Entscheidungen wie das Prinzip von Markowitz – allerdings *unabhängig* von Annahmen über die Verteilung der diskreten Rendite des Portfolios.

3 Portfoliotheorie

In Kapitel 2.2.3 haben wir gezeigt, dass die optimale Aufteilung des Vermögens auf eine riskante und eine risikofreie Anlage (unter bestimmten Annahmen) auf Basis von Erwartungswert und Varianz der Rendite des Portfolios aus den beiden Anlagen bestimmt werden kann. Wir betrachten nun mehrere riskante Anlagen und untersuchen zunächst, wie sich eine Änderung der Gewichte (oder prozentuellen Aufteilung) auf Erwartungswert und Varianz des Portfolios auswirkt. Anschließend werden wir zeigen, wie eine optimale Aufteilung in Abhängigkeit von der Risikoaversion gefunden werden kann.

3.1 Portfolios aus zwei riskanten Anlagen

Wir betrachten zunächst den Fall, dass zwei riskante Anlagen zur Verfügung stehen. Die Möglichkeit einer zusätzlichen Investition in eine risikofreie Anlage wird später behandelt. Zur Wahl stehen zwei Wertpapiere mit Renditen $R_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $R_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Der Investor sucht die optimale (prozentuelle) Aufteilung seines Vermögens zwischen diesen beiden Alternativen.

Wiederholung: Wir betrachten zwei Zufallsvariablen X und Y und zwei Konstante a und b. Für den Erwartungswert gilt:

$$\mathrm{E}[aX + bY] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] = a\mu_x + b\mu_y.$$

Für die Varianz gilt:

$$\mathrm{V}[aX + bY] = a^2\mathrm{V}[X] + b^2\mathrm{V}[Y] + 2ab\mathrm{cov}[X, Y] = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\sigma_{xy},$$

wobei $\mathrm{cov}[X, Y]$ die Kovarianz zwischen X und Y ist:

$$\mathrm{cov}[X, Y] = \mathrm{E}\left[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\right].$$

Die Korrelation ρ zwischen X und Y ist gegeben durch

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Der Erwartungswert eines Portfolios aus zwei riskanten Wertpapieren kann aus den Anteilen x_1 und x_2 und den Erwartungswerten der einzelnen Anlagen ermittelt werden:

$$\mu_p = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \qquad (x_1 + x_2 = 1).$$

Die Varianz der Rendite eines Portfolios hängt 1. von den Anteilen x_i, 2. von den Varianzen (der Renditen) der enthaltenen Wertpapiere und 3. von der Korrelation ρ bzw. Kovarianz σ_{12} zwischen den Renditen der Wertpapiere ab:

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_{12}.$$

Wir analysieren nun die Konsequenzen, die mit der Variation der Anteile x_1 und x_2 verbunden sind. Dazu werden μ_p und σ_p aller möglichen Portfolios graphisch dargestellt (siehe Abb.2). Jeder Punkt auf der resultierenden **Portfoliokurve** entspricht einem bestimmten Portfolio aus den beiden Wertpapieren. Die Endpunkte 1 und 2 sind jeweils Portfolios, die nur aus einem Wertpapier bestehen. Punkt 3 entspricht der μ-σ Kombination einer 50:50 Aufteilung und Punkt 4 repräsentiert das Portfolio mit minimaler Varianz. Zu beachten ist, dass jeder Punkt auf der Kurve einer anderen Aufteilung entspricht. Die Gewichte selbst können jedoch nicht abgelesen werden.

Abb.2: Kurve der μ-σ Kombinationen, die durch Variation der Anteile von x_1 und x_2 im Portfolio resultiert.

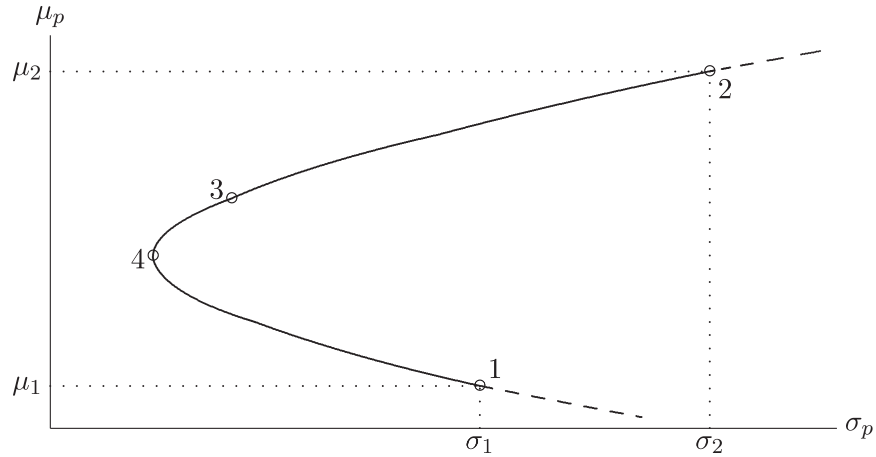
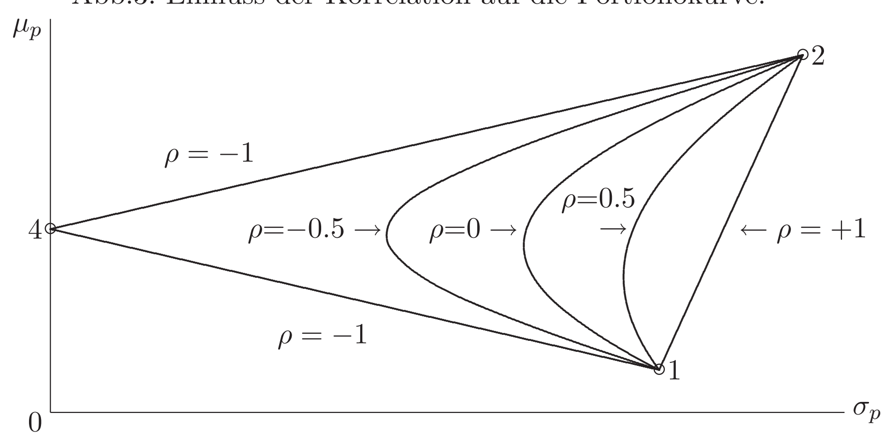


Abb.3: Einfluss der Korrelation auf die Portfoliokurve.



Korrelation und Diversifikation

Die Form der Portfoliokurve hängt von der Korrelation zwischen den Wertpapieren ab (siehe Abb.3). Für ρ=+1 bildet die Portfoliokurve eine Gerade zwischen den Punkten 1 und 2. In diesem Fall wird die Standardabweichung des Portfolios aus einer gewichteten Summe der einzelnen Standardabweichungen gebildet. Wenn ρ=1 kann σ_p durch Bildung eines Portfolios *nicht* auf einen Wert reduziert werden, der kleiner als $\min(\sigma_1, \sigma_2)$ ist.

Wenn die Korrelation von +1 abweicht, resultieren gekrümmte Linien, deren Krümmung mit der Abweichung von +1 zunimmt. Wenn $\rho<\sigma_1/\sigma_2$ (wobei σ_1 die kleinere der beiden Standardabweichungen ist) gibt es Portfolios mit einer Varianz, die kleiner als die Varianz von jener Einzelanlage ist, die minimale Varianz aufweist. Diese Reduktion der Portfolio-Varianz wird auch als **Diversifikationseffekt** bezeichnet.

Bei einer Korrelation von −1 sind die möglichen Portfolios durch Punkte entlang der beiden Geraden $\overline{14}$ und $\overline{42}$ gegeben. Im Fall ρ=–1 gibt es immer ein Portfolio, das eine Standardabweichung von null aufweist (hier Punkt 4). Das optimale Gewicht für Anlage 1 kann in diesem Fall aus

$$x_1^2\sigma_1^2 + (1-x_1)^2\sigma_2^2 - 2x_1(1-x_1)\sigma_1\sigma_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}.$$

berechnet werden.

Leerverkäufe

Bei einem **Leerverkauf** (*short-sale*) wird ein Wertpapier verkauft, das man (noch) nicht besitzt. Man erhält *jetzt* eine Einzahlung gegen das Versprechen, nach einer bestimmten Zeit (Haltedauer) eine Zahlung zu leisten, die dem *dann* geltenden Marktwert des Wertpapiers entspricht. Bei einem Leerverkauf ist einer der beiden Anteile größer als eins (und der jeweils andere Anteil negativ). Die resultierenden Portfolios sind in Abb.2 strichliert gezeichnet. Durch den Leerverkauf wird das aktuelle Vermögen w_0 vergrößert. Von einer *long position* spricht man, wenn ein Wertpapier jetzt gekauft und nach Ablauf der Haltedauer verkauft wird. Bei einer Kursänderung von P_0 auf P erzielt man in der *long position* eine Rendite von $R{=}P/P_0{-}1$. Hält man dasselbe Wertpapier in einer *short position* (d.h. man hat es leerverkauft), beträgt die Rendite $-R$. Ein Leerverkauf kann auch als Kreditaufnahme betrachtet werden, wobei der Kreditzinssatz der Rendite des leerverkauften Wertpapiers entspricht.

> **Beispiel 8:** Wenn $x_1{=}1.1$ und $x_2{=}{-}0.1$ wird ein Vermögen in Höhe von $1.1w_0$ in Wertpapier 1 investiert. Wenn das Portfolio aufgelöst wird, muss das leerverkaufte Wertpapier tatsächlich gekauft werden, was zu einer Auszahlung führt. Das (erwartete) Vermögen bei Auflösung des Portfolios beträgt
>
> $$W = 1.1w_0(1 + R_1) - 0.1w_0(1 + R_2) \qquad \mathrm{E}[W] = 1.1w_0(1 + \mu_1) - 0.1w_0(1 + \mu_2).$$
>
> Die erwartete Rendite des Portfolios beträgt unter Verwendung von $R_p{=}(W{-}w_0)/w_0$
>
> $$\mu_p = 1.1\mu_1 - 0.1\mu_2.$$

Wenn der Erwartungswert des leerverkauften Wertpapiers μ_1 kleiner als der Erwartungswert des Wertpapiers in der *long position* μ_2 ist, kann man den Erwartungswert des Portfolios über μ_2 hinaus steigern. Abb.2 zeigt aber, dass die Varianz des Portfolios bei Leerverkäufen größer als beim Halten von Long-Positionen ist. In Spezialfällen (z.B. $\mu_1{<}\mu_2$, $\sigma_1{>}\sigma_2$ und $\rho{=}1$) ist es jedoch möglich, dass die Varianz von Portfolios bei Leerverkäufen kleiner wird.

> **Aufgabe 4:** Bestimmen Sie mögliche μ-σ Kombinationen aus zwei Wertpapieren mit $\boldsymbol{\mu}{=}(4\%\ 6\%)'$ und $\boldsymbol{\sigma}{=}(12\%\ 18\%)'$. Berücksichtigen Sie die Möglichkeit von Leerverkäufen und vergleichen Sie den Verlauf der Kurve für Korrelationen von –0.4, 0 und 0.4.

3.2 Portfolios aus mehr als zwei Anlagen

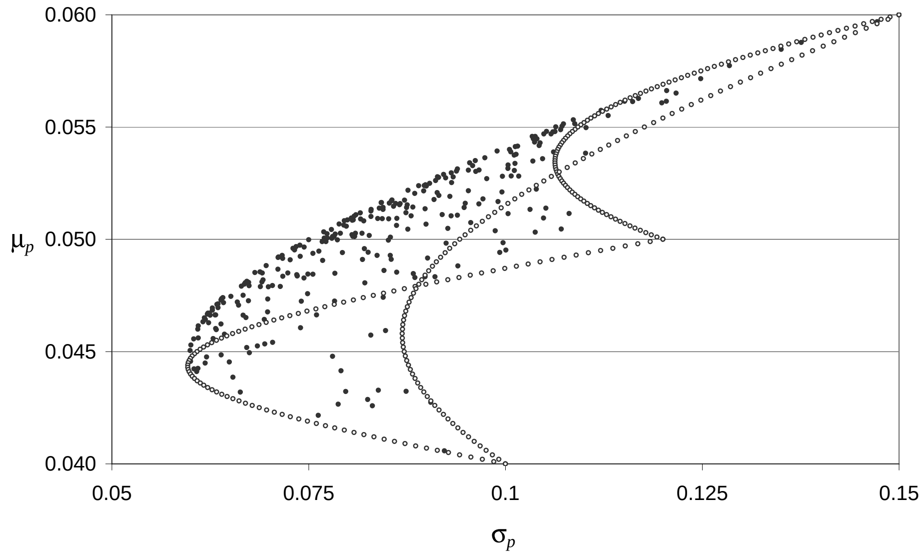
Für die Darstellung von mehr als zwei Anlagen ist es sinnvoll Vektoren und Matrizen zu verwenden. Der (skalare) Erwartungswert des Portfolios aus n Anlagen ist wie folgt definiert:

$$\mu_p = \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{x},$$

wobei $\boldsymbol{\mu}$ der $n{\times}1$ Vektor der n Erwartungswerte ist und $\boldsymbol{x}$ der $n{\times}1$ Vektor der n Anteile ist. Die Varianz des Portfolios ist definiert durch

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x},$$

Abb.4: Portfolios aus drei Wertpapieren.



wobei $\mathbf{\Sigma}$ die $n \times n$ Varianz-Kovarianz-Matrix der Renditen ist:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

Wenn Portfolios aus *mehr* als zwei Wertpapieren gebildet und in einem μ-σ Diagramm dargestellt werden, dann resultiert eine *Fläche* von möglichen μ-σ Kombinationen.

Beispiel 9: In Abb.4 sind mögliche Portfolios aus drei Anlagen mit

$$\boldsymbol{\mu} = (0.04\ 0.05\ 0.06)' \qquad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.0048 & 0.0015 \\ -0.0048 & 0.0144 & 0.0054 \\ 0.0015 & 0.0054 & 0.0225 \end{bmatrix}$$

dargestellt. Die verwendeten Korrelationen betragen ρ_{12}=–0.4, ρ_{13}=0.1 und ρ_{23}=0.3. Die Punkte beruhen auf zufällig gewählten Anteilen, die Kreise repräsentieren Portfolios aus jeweils zwei Anlagen.

Weshalb entsteht eine Fläche von μ-σ Kombinationen? Dazu betrachten wir zunächst nur die Kurven, die aus der Kombination der Paare 1-2, 1-3 und 2-3 resultieren. Wenn aus diesen Kurven bestimmte Portfolios ausgewählt werden und neuerlich zu Portfolios kombiniert werden, erhält man Kurven, die der Kombination von drei Wertpapieren entsprechen. Wenn dieser Vorgang immer weiter fortgesetzt wird, erhält man schließlich eine Fläche. Jeder Punkt der Fläche korrespondiert daher mit einer bestimmten Zusammensetzung des Portfolios (bestehend aus zwei oder mehr Wertpapieren). Wenn Leerverkäufe möglich sind, können Portfolios gebildet werden, deren μ-σ Kombinationen außerhalb des Bereichs liegen, der in Abb.4 skizziert ist.

Abb.5: Indifferenzkurven für unterschiedliches Ausmaß der Risikoaversion.

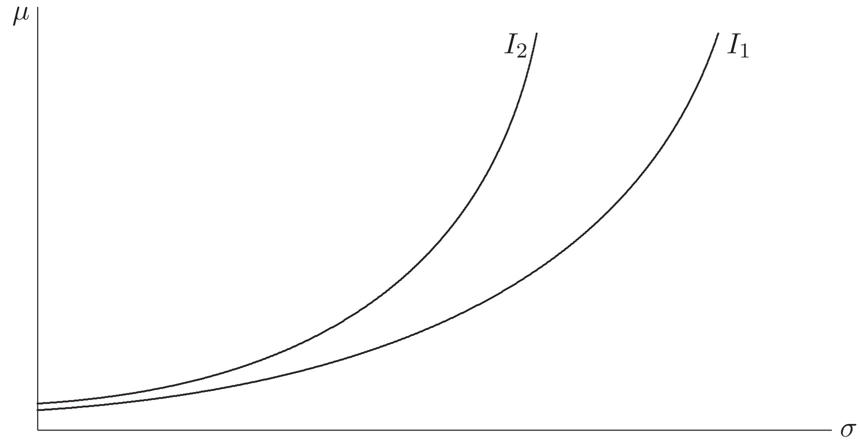
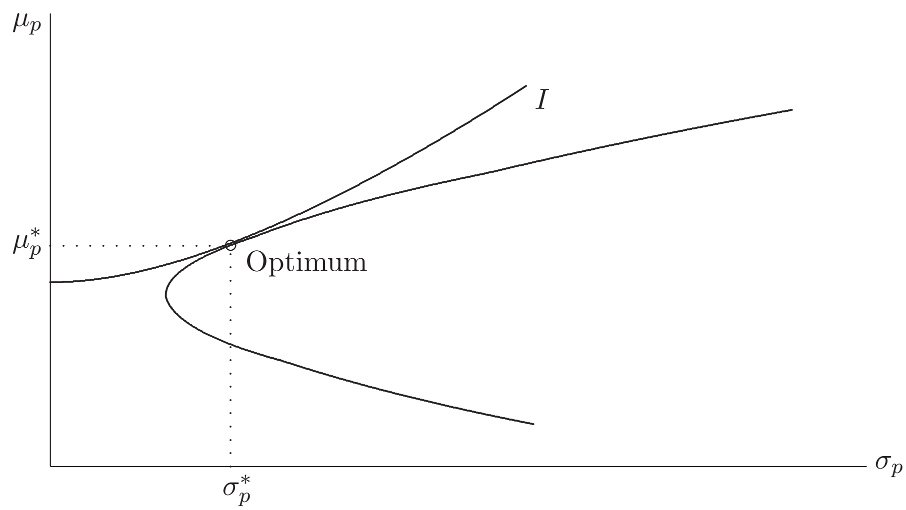


Abb.6: Die Auswahl des optimalen Portfolios.



3.3 Auswahl eines optimalen Portfolios – Graphische Analyse

Die Auswahl eines optimalen Portfolios erfolgt so, dass der Erwartungsnutzen maximiert wird. Die Lösung kann mit Hilfe von **Indifferenzkurven** (oder Isonutzenkurven) im μ-σ Diagramm dargestellt werden. Indifferenzkurven und Nutzenfunktionen entsprechen einander. Fixiert man den Nutzen auf einem bestimmten Niveau, zeigt die Indifferenzkurve, welche Kombinationen aus μ_p und σ_p denselben Nutzen stiften. Der Übergang von einer Indifferenzkurve zur anderen ist hingegen mit verändertem Nutzen verbunden. Kurven, die weiter vom Ursprung entfernt sind, repräsentieren größeren Nutzen.

Abb.5 zeigt Indifferenzkurven für zwei Anleger mit unterschiedlicher Risikoaversion. Ein risikoaverser Anleger ist nur dann bereit, eine größere Standardabweichung zu akzeptieren (d.h. ein höheres Risiko einzugehen), wenn dies durch einen entsprechend höheren Erwartungswert kompensiert wird. Der Anstieg der Indifferenzkurven ist umso stärker, je ausgeprägter die Risikoaversion des Anlegers ist. I_2 repräsentiert daher die Indifferenzkurve eines Investors, der risikoscheuer ist als jener, dessen Indifferenzkurve mit I_1 bezeichnet ist. Risikoneutrale Investoren werden durch horizontal verlaufende Indifferenzkurven charakterisiert.

Ein Investor legt bei der Auswahl des optimalen Portfolios die Anteile x_i so fest, dass eine

μ-σ Kombination mit maximalem Nutzen resultiert. Graphisch kann diese Auswahl so erfolgen, dass eine Indifferenzkurve so lange parallel verschoben wird, bis ein *Tangentialpunkt* mit der Portfoliokurve gefunden ist (siehe Abb.6). Dieser Punkt gibt Erwartungswert und Standardabweichung des *subjektiv optimalen Portfolios* an und korrespondiert mit einer bestimmten Aufteilung des Vermögens. Die tangierende Indifferenzkurve repräsentiert den höchsten erzielbaren Nutzen.

Zunehmende Risikoaversion äußert sich in immer steiler werdenden Indifferenzkurven. Die jeweils optimalen Tangentialpunkte befinden sich bei relativ geringer Risikoaversion in der Nähe des Wertpapiers mit dem größeren Risiko und liegen bei zunehmender Aversion immer näher beim Wertpapier mit dem geringsten Risiko. Der Tangentialpunkt, der das optimale Portfolio repräsentiert, liegt *immer* auf der so genannten **Effizienzlinie**. Effiziente Portfolios weisen maximalen Erwartungswert bei gegebener Standardabweichung auf.

3.3.1 Risikofreie Anlage

Wir erweitern nun die Problemstellung dadurch, dass auch in eine risikofreie Anlage R mit Rendite r_f investiert werden kann. Abb.7 zeigt die resultierenden μ-σ Kombinationen, wenn das Vermögen zwischen der risikofreien Anlage R und Portfolios auf der Effizienzlinie aufgeteilt wird. Ein Portfolio, das aus R und B besteht, hat in Abhängigkeit von x (dem Anteil von B) folgende Eigenschaften:

$$\mu_p = (1-x)r_f + x\mu_b \qquad \sigma_p^2 = x^2\sigma_b^2.$$

Nach Umformung erhält man die folgende Gleichung, die die Verbindungsgerade zwischen den Punkten R und B in Abb.7 beschreibt:

$$\mu_p = r_f + \frac{\mu_b - r_f}{\sigma_b}\sigma_p.$$

Der Anstieg einer Geraden, die so konstruiert ist, wird auch als **Sharpe-Ratio** bezeichnet.

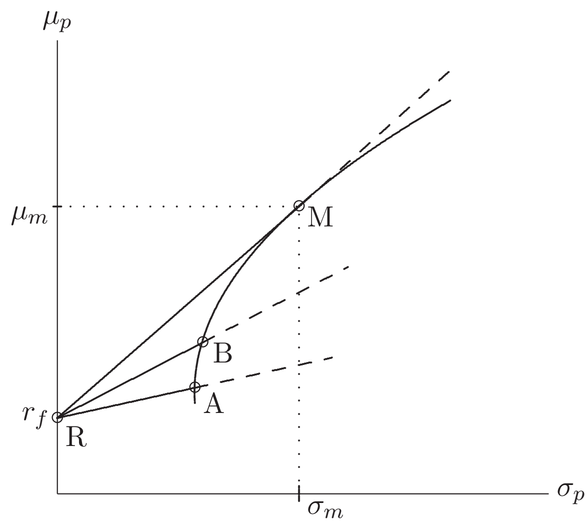
Durch Variation von x erhält man μ-σ Kombinationen zwischen R und B. Die strichlierte Fortsetzung der Gerade rechts von B kennzeichnet den Fall, dass x Werte größer als eins annimmt und das Gewicht der risikofreien Anlage (1–x) negativ ist. Dieses negative Gewicht entspricht der Kreditaufnahme (und Rückzahlung) mit dem Zinssatz r_f. Zur Erläuterung dieser Situation betrachten wir nochmals die Darstellung anhand von Vermögenswerten. Wenn der Investor einen Kredit in Höhe von (x–1)w_0 (x>1) aufnimmt, verfügt er insgesamt über ein Vermögen in Höhe von xw_0. Wird dieser Betrag *vollständig* in Portfolio B investiert, beträgt das erwartete Vermögen nach einer Periode

$$\mathrm{E}[W] = xw_0(1+\mu_b) + (1-x)w_0(1+r_f).$$

Für x>1 entspricht der zweite Term der Rückzahlung des Kreditbetrags inklusive Zinsen. Die erwartete Rendite des Portfolios aus R und B beträgt

$$\mathrm{E}[(W-w_0)/w_0] = \mu_p = x\mu_b + (1-x)r_f.$$

Abb.7: Verschiedene Kombinationen aus einer risikofreien Anlage und Portfolios auf der Effizienzlinie.



3.3.2 Separation

Eine besondere Situation liegt vor, wenn Portfolios aus R und M in Abb.7 betrachtet werden. Die resultierende Gerade ist eine Tangente an die Effizienzlinie. Diese Tangente ist jene Gerade, die den größten Anstieg aller möglichen Portfolios aus R und effizienten Portfolios aus riskanten Anlagen hat. Das Portfolio M hat die größte Sharpe-Ratio.

Wesentlich ist folgende Erkenntnis: durch Hinzufügen der risikofreien Anlage wird die bisherige Effizienzlinie durch die Tangente R–M ersetzt. Je nach Risikoeinstellung wird ein Investor sein optimales Portfolio nicht mehr auf der ursprünglichen Effizienzlinie, sondern auf dieser Tangente finden. Der Investor würde ein Portfolio aus M und der risikofreien Anlage halten. Wie hoch der Anteil von M ist hängt von der Risikoeinstellung ab. Die *Zusammensetzung* des Portfolios M (das nur aus riskanten Wertpapieren besteht) ist jedoch *unabhängig* von der Risikoeinstellung des Investors. Man kann daher die Zusammensetzung von Portfolio M *getrennt* von der Risikoeinstellung bestimmen, was mit dem Begriff **Separationstheorem** bezeichnet wird.

Wenn bei der Ermittlung der ursprünglichen Effizienzlinie *alle* riskanten Anlagen berücksichtigt wurden, die am Kapitalmarkt angeboten werden, und wenn alle Investoren dieselben Erwartungswerte und Kovarianzen unterstellen, wird M als **Marktportfolio** bezeichnet. Die Anteile in diesem Portfolio entsprechen dem relativen Wert jeder Einzelanlage am Gesamtwert aller n riskanten Anlagen:

$$x_i = \frac{n_i p_i}{\sum_{j=1}^{n} n_j p_j},$$

wobei n_i die Anzahl des zum Preis p_i gehandelten Wertpapiers i bezeichnet. Wenn ein Wertpapier (oder Sub-Portfolio) nicht zur Bildung des Marktportfolios M benötigt wird, dann wird es nicht nachgefragt und verschwindet vom Markt. Die Gleichung

$$\mu_p = r_f + \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_m}\sigma_p$$

wird daher als **Kapitalmarktlinie** (*capital market line* (CML)) bezeichnet. Der **Marktpreis des Risikos** ist der Anstieg der Kapitalmarktlinie – für jede zusätzliche Einheit Risiko (gemessen anhand der Standardabweichung effizienter Portfolios), muss der Erwartungswert der Rendite um den Betrag $(\mu_m – r_f)/\sigma_m$ steigen.

3.4 Auswahl von optimalen Portfolios – Analytische Lösung

3.4.1 Zwei Wertpapiere

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass zwei Anlagen mit Renditen $R_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $R_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ zur Wahl stehen. Wir suchen das optimale Gewicht von Wertpapier 1. Erwartungswert und Varianz des Portfolios sind gegeben durch

$$\mu_p = x\mu_1 + (1-x)\mu_2$$

$$\sigma_p^2 = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2\rho.$$

Unter Verwendung der exponentiellen Nutzenfunktion lautet die Zielfunktion

$$\mu_p - 0.5\lambda\sigma_p^2 \longrightarrow \max .$$

Die Entscheidungsvariablen x_1 und x_2 sind in μ_p und σ_p enthalten. Werden diese beiden Terme aufgelöst, dann lautet das vollständige Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned}(x_1\mu_1 + x_2\mu_2) - 0.5l(x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho) &\longrightarrow \max \\ x_1 + x_2 &= 1.\end{aligned}$$

Der optimale Betrag x_1^* für die Investition in Anlage 1 beträgt:

$$x_1^* = \frac{\lambda\sigma_2(\rho\sigma_1 - \sigma_2) - \mu_1 + \mu_2}{\lambda(2\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2)}.$$

Wenn die Renditen *unkorreliert* sind, lautet die optimale Lösung:

$$x_1^* = \frac{\lambda\sigma_2^2 + \mu_1 - \mu_2}{\lambda(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}.$$

Beispiel 10: Tab.2 enthält die optimale Zusammensetzung von Portfolios aus zwei Wertpapieren mit $\boldsymbol{\mu}$=(0.02 0.05)$'$, $\boldsymbol{\sigma}$=(0.15 0.2)$'$ und ρ=0 für verschiedene Werte der Risikoaversion λ. Man erkennt, dass bei zunehmender Risikoaversion der Anteil des Wertpapiers mit der geringeren Standardabweichung ständig zunimmt. Die Reduktion der Standardabweichung des Portfolios korrespondiert mit einem geringeren Erwartungswert. Achtung: wenn Mittelwert und Standardabweichung der Renditen *in Prozent* angegeben sind, muss $\lambda/100$ verwendet werden, damit sich die optimale Lösung nicht ändert.

Aufgabe 5: Verwenden Sie die Angaben aus Aufgabe 4 ($\boldsymbol{\mu}$=(4% 6%)$'$ und $\boldsymbol{\sigma}$=(12% 18%)$'$). Bestimmen Sie die optimalen Anteile für zwei Wertpapiere bei einer Risikoaversion von λ=4. Vergleichen Sie die optimalen Lösungen für Korrelationen von –0.4, 0 und 0.4.

Tab.2: Optimale Anteile im Portfolio für verschiedene Grade der Risikoaversion.

	λ=1	λ=2	λ=4	λ=10	λ=∞
x_1	0.16	0.40	0.52	0.592	0.64
x_2	0.84	0.60	0.48	0.408	0.36
μ_p	0.045	0.038	0.034	0.032	0.031
σ_p	0.170	0.134	0.124	0.121	0.120

3.4.2 Minimum-Varianz Portfolio

Von allen Portfolios auf der Effizienzlinie hat das Portfolio mit der geringsten Varianz den geringsten Erwartungswert. Dieses Portfolio wird von einem extrem risikoaversen Investor ($\lambda \to \infty$) gewählt. Um die Gewichte dieses Portfolios zu berechnen wird das folgende Optimierungsproblem gelöst:

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x} \longrightarrow \min \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{x} = 1 \qquad \boldsymbol{\iota}' = (1, \ldots, 1).$$

Für den Fall, dass nur zwei Wertpapiere zur Wahl stehen, beträgt der optimale Anteil von Wertpapier 1

$$x_1^* = \frac{\sigma_2(\rho\sigma_1 - \sigma_2)}{2\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2}.$$

Für den allgemeinen Fall mit n Wertpapieren lautet die optimale Lösung

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota}}. \tag{9}$$

Für die Herleitung dieser Lösung maximieren wir die Lagrangefunktion

$$-\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x} + \ell_0(\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{x} - 1) \longrightarrow \max.$$

Die partiellen Ableitungen nach $\boldsymbol{x}$ und ℓ_0 resultieren in folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x} + \ell_0\boldsymbol{\iota} &= 0 \\ \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{x} &= 1 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota}\ell \qquad (\ell = -0.5\ell_0).$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota}\ell = 1 \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{1}{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota}}$$

und daher $\boldsymbol{x}^*$=$(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota})/(\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota})$.

3.4.3 Tangentialportfolios

In Kapitel 3.3.2 haben wir gezeigt, dass die Berücksichtigung einer risikofreien Anlage zu Portfolios auf einer Tangente führt, die von r_f ausgeht und die (ursprüngliche) Effizienzlinie berührt. Diese Effizienzlinie (die nur auf riskanten Anlagen beruht) kann bestimmt werden, in dem Tangentialportfolios für unterschiedliche Ausgangspunkte c der Tangente auf der Ordinate gesucht werden. Die Anteile, die ein bestimmtes Tangentialportfolio definieren, müssen folgende Bedingung erfüllen (siehe Benninga[1], S.180 bzw. Grinold/Kahn[7], S.26;32):

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - c)}{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - c)}. \tag{10}$$

Durch Variation von c kann die Hüllkurve aller möglichen Portfolios (*envelope portfolios*) gefunden werden. Diese Hüllkurve besteht aus Portfolios, die durch maximales μ_p für gegebenes σ_p (Effizienzlinie) bzw. minimales σ_p für gegebenes μ_p gekennzeichnet sind. Das Marktportfolio aus Kapitel 3.3.2 erhält man für c=r_f. Das Minimum-Varianz Portfolio kann ebenfalls aus dieser Beziehung für $c \rightarrow -\infty$ ermittelt werden. *Effiziente* Tangentialportfolios erhält man wenn c kleiner als der Erwartungswert des Minimum-Varianz Portfolios ist.

Zu bemerken ist, dass konvexe Linearkombinationen von Portfolios auf der Hüllkurve wieder ein Portfolio auf der Hüllkurve ergeben. Wenn daher $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ Portfolios auf der Hüllkurve sind, dann liegt auch $a\boldsymbol{x}_1$+(1–a)$\boldsymbol{x}_2$ auf der Hüllkurve. Wenn es sich bei $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ um effiziente Portfolios handelt, ist auch eine konvexe Linearkombination für a<1 effizient.

Beispiel 11: Das Minimum-Varianz Portfolio für die Wertpapiere aus Beispiel 9 ist gegeben durch $\boldsymbol{x}^*$=(0.556 0.425 0.019)′. Für c=0.001 und c=0.04 erhält man die effizienten Portfolios $\boldsymbol{x}_1$=(0.505 0.415 0.08)′ und $\boldsymbol{x}_1$=(0.07 0.332 0.598)′.

3.4.4 n Wertpapiere

Das Optimierungsproblem zur Bestimmung optimaler Portfolios für n Wertpapiere lautet:

$$\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{x} - 0.5\lambda\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x} \longrightarrow \max \qquad \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{x} = 1.$$

Zur Lösung verwenden wir die Lagrangefunktion

$$\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{x} - 0.5\lambda\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x} + \ell(\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{x} - 1) \longrightarrow \max.$$

Die partiellen Ableitungen nach $\boldsymbol{x}$ und ℓ resultieren in folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -\lambda\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x} + \ell\boldsymbol{\iota} &= -\boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{x} &= 1 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \ell\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota}\right).$$

Tab.3: Optimale Portfolioanteile bei drei Wertpapieren.

	λ=1	λ=2	λ=4	λ=10	λ=∞
x_1	–0.077	0.239	0.398	0.493	0.556
x_2	0.304	0.365	0.395	0.413	0.425
x_3	0.773	0.396	0.207	0.094	0.019
μ_p	0.059	0.052	0.048	0.046	0.045
σ_p	0.132	0.084	0.066	0.061	0.060

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\iota}'\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}+\ell\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota}\right)=1 \qquad \Longrightarrow \qquad \ell=\frac{\lambda-a}{b},$$

wobei die (skalaren) Hilfsgrößen a=$\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ und b=$\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota}$ verwendet werden. Die optimale Lösung lautet daher

$$\boldsymbol{x}^*=\frac{1}{\lambda}\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota}\left(\frac{\lambda-a}{b}\right)\right].$$

Die optimale Lösung kann auch als gewichtete Summe aus dem Minimum-Varianz Portfolio (9) und einem Tangentialportfolio (10) (mit c=0) angeschrieben werden:

$$\boldsymbol{x}^*=\frac{\lambda-a}{\lambda}\frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\iota}}+\frac{1}{\lambda}\frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}.$$

Beispiel 12: Tab.3 enthält Anteile von optimalen Portfolios für die drei Wertpapiere aus Beispiel 9. Beachtenswert dabei ist, dass sich die Zusammensetzung des Portfolios in Abhängigkeit vom Grad der Risikoaversion stark verändert. Bei λ=1 ist der Anteil x_1 des Wertpapiers mit der geringsten Standardabweichung negativ. Dieser Leerverkauf (der einer Kreditaufnahme zu den Konditionen von Wertpapier 1 entspricht) ermöglicht einen Wert μ_p nahe bei μ_3, jedoch mit (deutlich) geringerem Risiko als σ_3.

3.4.5 Schätzung von μ, σ und ρ

Für die Optimierung der Anteile im Portfolio müssen die Erwartungswerte μ_i und die Kovarianzmatrix der Renditen geschätzt werden. Die einfachste Vorgangsweise besteht in der Verwendung von diskreten Renditen r_{it} (i ist der Index des Wertpapiers und t der Index der Beobachtung):

$$\hat{\mu}_i=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}r_{it}$$

$$\hat{\sigma}_i^2=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(r_{it}-\hat{\mu}_i)^2$$

$$\hat{\rho}_{ij}=\frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j} \qquad \hat{\sigma}_{ij}=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(r_{it}-\hat{\mu}_i)(r_{jt}-\hat{\mu}_j).$$

Die Elemente in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$ sind gegeben durch

$$\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\rho}_{ij}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j.$$

Wenn angenommen wird, dass diskrete Renditen normalverteilt sind, eine exponentielle Nutzenfunktion unterstellt wird und w_0=1 gesetzt wird, können diese Schätzwerte für die Ermittlung von μ_p und σ_p in der Zielfunktion

$$\mu_p - 0.5\lambda\sigma_p^2 \longrightarrow \max.$$

verwendet werden.

$\hat{\mu}_i$, $\hat{\sigma}_i^2$ und $\hat{\rho}_{ij}$ können auch aus stetigen Renditen geschätzt werden. Während sich $\hat{\sigma}_i^2$ und $\hat{\rho}_{ij}$ nur geringfügig unterscheiden, bzw. die Unterschiede nur einen geringen Effekt auf die optimale Lösung haben, muss bei der Schätzung von $\hat{\mu}_i$ die Beziehung (5) berücksichtigt werden:

$$\hat{\mu}_i = \exp\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_{it}\right) + 0.5\hat{\sigma}_i^2\right\} - 1,$$

wobei $\hat{\sigma}_i$ auch aus stetigen Renditen geschätzt wird.

> **Aufgabe 6:** Verwenden Sie die Daten aus Aufgabe 1 und schätzen Sie die Mittelwerte und die Kovarianzmatrix aus diskreten Renditen. Bestimmen Sie die Hüllkurve der möglichen Portfolios, das Minimum-Varianz Portfolio und optimale Portfolios für λ=1, λ=5 und λ=10.

3.5 Faktormodelle

Für den Fall, dass eine sehr große Anzahl von Wertpapieren als mögliche Kandidaten für die Aufnahme in ein Portfolio zur Wahl stehen, müssen sehr viele Korrelationen ($n(n$–$1)/2$) geschätzt werden (z.B. mehr als 10000, wenn n=150). Eine beträchtliche Vereinfachung beruht auf der Beobachtung, dass einzelne Wertpapiere sehr häufig der allgemeinen Marktbewegung folgen. Daher wird die Rendite jeder einzelnen Anlage als (lineare) Funktion des so genannten Marktfaktors betrachtet:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i. \tag{11}$$

Der Marktfaktor wird durch die Rendite des Marktportfolios R_m repräsentiert. Der so genannte **Beta-Faktor** β_i zeigt wie stark die Rendite der Aktie i auf Änderungen in der Marktrendite reagiert. Renditen einzelner Wertpapiere reagieren jedoch nicht nur auf den Markt. Daher gibt es auch Bestandteile der Rendite, die auf aktienspezifische Ursachen zurückzuführen sind. Diese werden durch α_i und e_i abgebildet. e_i ist eine Zufallsvariable mit Erwartungswert null, von der üblicherweise angenommen wird, dass sie nicht mit R_m korreliert ist. Das bedeutet, dass Ursachen, die *nur* die betrachtete Rendite betreffen, nicht schon in der Marktrendite reflektiert sind.

Aus dem Faktormodell kann man Erwartungswert und Varianz der Rendite des i-ten Wertpapiers ableiten:

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i\mu_m \qquad \sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_m^2 + \sigma_{e_i}^2. \tag{12}$$

Die Varianz $\sigma_{e_i}^2$ ist jener Teil der Gesamtvarianz σ_i^2, der nicht auf die Marktrendite zurückgeführt werden kann, sondern nur aktienspezifisch ist. $\sigma_{e_i}^2$ wird auch als (Maß für) das Residualrisiko bezeichnet.

Für die Ermittlung der Elemente der Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$ wird zunächst das Faktormodell für zwei Wertpapiere i und j betrachtet. Die Kovarianz zwischen R_i und R_j ist gegeben durch

$$\sigma_{ij} = \mathrm{E}[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)].$$

Nach Substitution des Faktormodells (11) und unter der Annahme $\mathrm{E}[e_i e_j]$=0 (d.h. die aktienspezifischen Bestandteile der Rendite verschiedener Wertpapiere sind nicht miteinander korreliert) erhält man

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2.$$

Für den Fall von n Wertpapieren kann die Kovarianzmatrix aus den n Beta-Faktoren berechnet werden:

$$\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}' \sigma_m^2 \qquad \boldsymbol{\beta}' = (\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Die Ermittlung der Kovarianzmatrix beruht daher nur auf der Schätzung von n Beta-Faktoren und der Varianz der Marktrendite.

Wir betrachten nun die Varianz eines Portfolios aus n Wertpapieren. Die Rendite des Portfolios ist

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i + R_m \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Daraus folgt

$$R_p = \alpha_p + \beta_p R_m + e_p,$$

wobei der Beta-Faktor des Portfolios eine (mit x_i) gewichtete Summe der einzelnen Beta-Faktoren ist:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i.$$

Für die Varianz des Portfolios erhalten wir (unter den Annahmen $\mathrm{cov}[R_m, e_i]$=0 und $\mathrm{cov}[e_i, e_j]$=0)

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{e_i}^2.$$

Je größer die Anzahl der Wertpapiere ist, umso kleiner[7] wird der zweite Term, der auf aktienspezifischer Varianz beruht. Wenn ein großes Portfolio gehalten wird, kann dieser

[7]Beweisidee: Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass alle Varianzen gleich groß sind und betrachten $x_1^2{+}x_2^2$. Nun vergrößern wir das Portfolio und ersetzen x_2 durch $x_2{=}w_1{+}w_2$ (d.h. die Summe aller Anteile bleibt gleich). Da $(w_1{+}w_2)^2{>}w_1^2{+}w_2^2$, ist $x_1^2{+}x_2^2$ größer als $x_1^2{+}w_1^2{+}w_2^2$.

Teil des Risikos (fast) zum Verschwinden gebracht werden und wird daher auch als (Maß für) das *diversifizierbare* Risiko bezeichnet. Der Term $\beta_p^2\sigma_m^2$ entspricht dagegen dem Risiko, das durch Bildung eines Portfolios nicht reduziert werden kann. Er gibt den Anteil des *systematischen* Risikos an der gesamten Varianz des Portfolios an. Wenn daher ein (großes) Portfolio gehalten wird, ist nicht $\sigma_{e_i}^2$, sondern β_i ein adäquates Risikomaß eines Wertpapiers. Der Beta-Faktor bestimmt den Beitrag des i-ten Wertpapiers zum nicht diversifizierbaren Risiko.

Der Beta-Faktor kann aus historisch beobachteten Renditen eines Wertpapiers y_{it} und des Marktes y_{mt} $(t{=}1,\ldots,T)$[8] mit der Methode der Kleinsten-Quadrate geschätzt werden. Wenn man dieses Prinzip anwendet, können Schätzwerte für β_i und α_i wie folgt bestimmt werden:

$$\hat{\beta}_i = \frac{s_{im}}{s_m^2} = r_{im}\frac{s_i}{s_m}$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \hat{\beta}_i\bar{y}_m,$$

wobei $\bar{y}_i$ und $\bar{y}_m$ Mittelwerte von Wertpapier- und Marktrendite sind. s_i und s_m sind deren Standardabweichungen und s_{im} bzw. r_{im} sind Kovarianz und Korrelation zwischen Wertpapier und Marktrendite.

Auf Basis des Faktormodells und (12) kann die Gesamtvarianz des Wertpapiers in markt- und aktienspezifische Varianz zerlegt werden: $s_i^2{=}\hat{\beta}_i^2 s_m^2{+}s_{e_i}^2$. Das Bestimmtheitsmaß der Regression R^2 kann auch wie folgt angeschrieben werden: $(\hat{\beta}_i^2 s_m^2)/s_i^2$. R^2 misst daher den Anteil der marktspezifischen Varianz an der Gesamtvarianz.

Beispiel 13: Wir betrachten 80 monatliche Beobachtungen des ATX und Kurse der Bank-Austria Vorzugsaktie (Jänner 1986 bis August 1992). Auf Basis von stetigen Renditen (in Prozent) wird die folgende Regressionsgleichung geschätzt (Standardfehler in Klammer):

$$\hat{y}_{it} = \underset{(0.52)}{0.076} + \underset{(0.067)}{0.883}\, y_{mt} \qquad R^2 = 0.693 \qquad s_e = 4.62 \qquad s_i = 8.3.$$

Der Koeffizient 0.883 kann wie folgt interpretiert werden. Eine Änderung in der Marktrendite um 10 Prozentpunkte bewirkt eine Veränderung in der erwarteten Rendite der Aktie um 8.83 Prozentpunkte. Bei einer Marktrendite von 10% beträgt die erwartete Rendite der Aktie 8.91% ($0.076{+}0.883 \cdot 10.0{=}8.91$). Aus R^2 kann man ableiten, dass ungefähr 70% der Gesamtvarianz der Aktie systematisches (nicht diversifizierbares) Risiko und etwa 30% unsystematisch oder aktienspezifisch sind.

Aufgabe 7: Erheben Sie Daten einer einzelnen Aktie und des entsprechenden Aktienindex von `finance.yahoo.com` oder einer anderen Quelle. Schätzen Sie ein Regressionsmodell zur Bestimmung des Beta-Faktors und beurteilen Sie das Ausmaß des systematischen Risikos dieser Aktie.

Es gibt eine Vielfalt von Einflüssen, die für die Renditen eines Wertpapiers relevant sind (oder sein können). Daher ist es wenig plausibel, dass mit einem einzigen Faktor die Rendite eines Wertpapiers hinreichend genau erklärt werden kann. Daraus folgt weiters, dass

[8] T bezeichnet die Anzahl der Beobachtungen in der Stichprobe.

auch die daraus abgeleitete Kovarianzmatrix keine sehr präzise Abbildung der tatsächlichen Kovarianzmatrix erlaubt. Um in dieser Hinsicht eine Verbesserung zu erzielen kann man ein **Mehrfaktormodell** folgender Form verwenden:

$$R_i = \alpha_i + \beta_{i1} F_1 + \cdots + \beta_{ik} F_k + e_i. \tag{13}$$

Die Faktoren $F_1, \ldots, F_k$ können z.B. Zinsen, Ölpreis, Wechselkurse und andere Einflüsse abbilden. Die Faktoren werden üblicherweise so gewählt oder konstruiert, dass sie unkorreliert sind. Die Beta-Faktoren geben die Änderung in der erwarteten Rendite μ_i an, wenn der entsprechende Faktor um eine Einheit zunimmt. Die Kovarianzmatrix kann aus den $n \times k$ Matrizen der Beta-Faktoren und der (diagonalen) Kovarianzmatrix der Faktoren $\mathbf{\Sigma}_F$ wie folgt berechnet werden:

$$\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{\beta} \mathbf{\Sigma}_F \boldsymbol{\beta}'.$$

3.6 Das Capital Asset Pricing Model (CAPM)

3.6.1 Grundlagen

In Kapitel 3.3.2 haben wir gezeigt, dass alle Investoren ein Portfolio aus dem Marktportfolio und der risikofreien Anlage halten. Alle effizienten Portfolios liegen auf der Kapitalmarktlinie, die die erwartete Rendite effizienter Portfolios in Abhängigkeit von der Standardabweichung σ_p bestimmt. Es liegen jedoch nicht alle (einzelnen) Wertpapiere und Portfolios auf der Kapitalmarktlinie. Das CAPM ist ein Gleichgewichtsmodell zur Beantwortung der Frage, wie die erwartete Rendite *einzelner* Wertpapiere (oder ineffizienter Portfolios) bestimmt werden kann, wenn alle Investoren den Nutzen nach dem μ-σ-Kriterium maximieren und dieselben Erwartungswerte und Kovarianzen unterstellen. Das CAPM beruht auf weiteren Annahmen (siehe Elton/Gruber[6], S.294), die bereits implizit in Kapitel 3.3.2 getroffen wurden.

Das CAPM geht davon aus, dass man für das Tragen von Risiken eine entsprechende 'Entlohnung' erhält. Im Gleichgewicht belohnt der Markt jedoch kein Risiko, das durch Diversifikation mit Portfolios eliminiert werden könnte. In Kapitel 3.5 haben wir gezeigt, dass der Beta-Faktor (und nicht die Varianz) ein adäquates Risikomaß ist, wenn (große) Portfolios gehalten werden. Das CAPM verbindet diese beiden Aspekte: 1. alle Investoren halten ein sehr stark diversifiziertes Portfolio (das Marktportfolio) und 2. die erwartete Rendite μ_i *einzelner* Wertpapiere (bzw. die Risikoprämie oder *excess return* μ_i–r_f) hängt vom *Beitrag* dieses Wertpapiers zum Risiko des Marktportfolios – dem Beta-Faktor – ab:

$$\mu_i = r_f + (\mu_m - r_f)\beta_i.$$

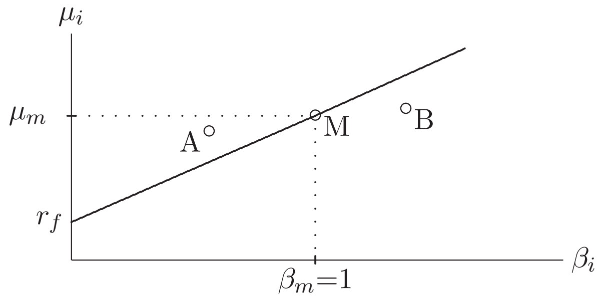
Die *erwartete* Rendite eines *einzelnen* Wertpapiers liegt demnach umso weiter über dem risikofreien Zinssatz, je größer β und je größer die Markt-Risikoprämie μ_m–r_f ist. Der Beta-Faktor des risikofreien Wertpapiers beträgt null; der Beta-Faktor des Marktportfolios β_m ist eins.

Die Herleitung des CAPM beruht auf folgender Überlegung[9]. Wir betrachten ein Portfolio aus Wertpapier i (Anteil x_i) und dem Marktportfolio, das in Abhängigkeit von x_i folgende Eigenschaften hat:

$$\mu_p = x_i \mu_i + (1 - x_i)\mu_m \qquad \sigma_p^2 = x_i^2 \sigma_i^2 + (1 - x_i)^2 \sigma_m^2 + 2x_i(1 - x_i)\sigma_{im}.$$

[9] Für weitere Details zum CAPM verweisen wir auf Rupert[16], S.237 und Elton/Gruber[6], S.303.

Abb.8: Wertpapiermarktlinie (SML) des CAPM.



Durch Variation von x_i erhält man Portfolios unterhalb der Kapitalmarktlinie. Für das Marktportfolio x_i=0 ist die erste Ableitung $\partial\mu_p/\partial\sigma_p$ gleich dem Anstieg der Kapitalmarktlinie. $\partial\mu_p/\partial\sigma_p$ erhält man, indem zuerst die Ableitungen von μ_p und σ_p nach x_i gebildet werden:

$$\frac{\partial\mu_p}{\partial x_i} = \mu_i - \mu_m \qquad \frac{\partial\sigma_p}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\frac{\{2x_i\sigma_i^2 - 2(1-x_i)\sigma_m^2 + 2(1-2x_i)\sigma_{im}\}}{\sigma_p}.$$

Daher kann man $\partial\mu_p/\partial\sigma_p$ wie folgt definieren:

$$\frac{\partial\mu_p}{\partial\sigma_p} = \frac{\partial\mu_p/\partial x_i}{\partial\sigma_p/\partial x_i} = \frac{(\mu_i-\mu_m)\sigma_m}{x_i\sigma_i^2 - (1-x_i)\sigma_m^2 + (1-2x_i)\sigma_{im}}$$

Für das Marktportfolio x_i=0 gilt

$$\frac{\partial\mu_p}{\partial\sigma_p} = \frac{(\mu_i-\mu_m)\sigma_m}{\sigma_{im}-\sigma_m^2} = \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_m},$$

woraus man $(\mu_i - \mu_m)\sigma_m^2 = (\mu_m - r_f)(\sigma_{im} - \sigma_m^2)$ und nach Vereinfachung und Umformung

$$\mu_i - r_f = (\mu_m - r_f)\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = (\mu_m - r_f)\beta_i$$

erhält. Wie im Einfaktormodell (11) ist der Beta-Faktor gegeben durch

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}[R_i, R_m]}{\sigma_m^2} = \rho_{im}\frac{\sigma_i}{\sigma_m}.$$

Für das Marktportfolio gilt

$$\beta_m = \sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i = 1,$$

woraus folgt, dass

$$\sigma_m^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{cov}[R_i, R_m].$$

Der Beitrag eines einzelnen Wertpapiers zur Varianz des Marktportfolios hängt daher von der Kovarianz der Aktienrendite mit der Rendite des Marktportfolios ab. Wir können daher die bereits in Kapitel 3.5 gemachte Aussage wiederholen: Für das Risiko des Marktportfolios ist nur das systematische Risiko relevant, das auch als Kovarianzrisiko bezeichnet wird. Auf Basis der Kovarianz kann das CAPM auch wie folgt angeschrieben werden:

$$\mu_i = r_f + \lambda \text{cov}[R_i, R_m] \qquad \lambda = \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_m^2}.$$

Obwohl hier die Risikoprämie durch die Varianz und nicht die Standardabweichung dividiert wird (siehe S.22), wird λ hier (auch) als Marktpreis des Risikos bezeichnet.

3.6.2 Implikationen

Die Abhängigkeit zwischen μ_i und β_i wird als Wertpapiermarktlinie (*security market line* (*SML*)) bezeichnet (siehe Abb.8). Auf dieser Linie liegen Linearkombinationen aus dem Marktportfolio und dem risikofreien Wertpapier. Wenn die μ_i-β_i Kombination eines einzelnen Wertpapiers über der Linie liegt (z.B. A in Abb.8), wäre die erwartete Rendite im Vergleich zum verbundenen Risiko zu hoch. Es besteht daher ein Anreiz dieses Wertpapier zu kaufen. Die erhöhte Nachfrage führt zu einem Steigen der Kurse und damit zu einer geringeren erwarteten Rendite. Analog hätte ein Wertpapier, das unter der SML liegt (z.B. B in Abb.8), ein zu geringes μ_i und würde so lange angeboten werden, bis der Kurs ausreichend stark sinkt und μ_i dem CAPM entspricht. *Im Gleichgewicht* resultiert jene Rendite, die dem CAPM entspricht und alle Wertpapiere liegen auf der SML.

Das CAPM ist ein *pricing* Modell. Das wirft die Frage auf, wie mit dem CAPM der *Preis* eines Wertpapiers, oder allgemein der *Wert* einer Investition oder eines Unternehmens bestimmt werden kann. Dazu betrachten wir die zufallsabhängige Rendite R, die der Investor zum Planungshorizont erzielt. $R{=}P_t/P_0{-}1$, wobei P_t die unsichere Zahlung in t und P_0 der zu bestimmende Preis der Investition in der Gegenwart ist. Aus dem CAPM folgt

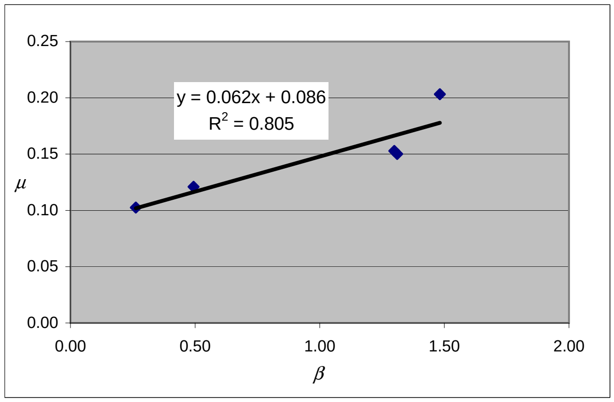
$$\mathrm{E}[R] = \frac{\mathrm{E}[P_t]}{P_0} - 1 = r_f + \lambda \text{cov}[R, R_m] \quad \Longrightarrow \quad P_0 = \frac{\mathrm{E}[P_t]}{1 + r_f + \lambda \text{cov}[R, R_m]}.$$

Zur Bestimmung des Preises P_0 wird der Erwartungswert der zukünftigen Zahlung P_t mit einem *risikoadjustierten* Zinssatz abgezinst, wobei die Anpassung an das Risiko von der Kovarianz zwischen der Rendite der Investition und der Marktrendite bestimmt wird.

3.6.3 Tests

Das CAPM postuliert eine lineare Beziehung zwischen der erwarteten Rendite eines Wertpapiers und der Marktrendite. Eine empirische Überprüfung des CAPM kann auf Basis einer Regressionsanalyse erfolgen, bei der die Mittelwerte von Renditen mehrerer Aktien auf die Beta-Faktoren dieser Aktien regressiert werden (Querschnittsregression). Die Beta-Faktoren werden *vorher* für jede einzelne Aktie aus Zeitreihen der Aktienrenditen und Marktrenditen ebenfalls mit einer Regressionsanalyse – wie in Beispiel 13 – geschätzt (Zeitreihenregression). Die Marktrenditen stammen dabei meist aus einem breiten Aktienindex, der als *Approximation* für das theoretische Marktportfolio aller riskanten Anlagemöglichkeiten dient.

Beispiel 14: Wir verwenden Daten für fünf Aktien und den S&P 500 (Quelle: Benninga[1], S.151). Anhand von Renditen für zehn Jahre (1974–1983) werden μ_i und β_i geschätzt. Die Regression von μ_i auf β_i ergibt folgendes Bild:



Man erkennt eine recht gute Übereinstimmung zwischen den realisierten Werten von μ_i und den erwarteten Werten auf Basis des CAPM. Die Schätzwerte für die risikofreie Rendite und die erwartete Marktrendite in diesem Beispiel betragen 8.6% bzw. 14.8% (0.086+0.062). Die beobachtete Marktrendite aus den Daten beträgt 12.4%. Benninga[1] verwendet noch eine zusätzliche Aktie und findet dann eine sehr schwache Beziehung zwischen μ_i und β_i (kein Regressionskoeffizient ist signifikant; R^2 beträgt nur 0.28). Benninga's Ergebnis widerspricht daher dem CAPM.

Wenn empirische Tests im Widerspruch zum CAPM stehen, kann die Gültigkeit des CAPM angezweifelt werden. Es kann aber auch mehrere andere Gründe haben. Zunächst kann es sein, dass die (zahlreichen) Annahmen des CAPM verletzt sind (z.B. könnten Investoren inhomogene Annahmen über Erwartungswerte und Kovarianzen haben). Weiters könnte die verwendete Stichprobe von Aktien zu klein sein, bzw. nicht genügend riskante Anlagemöglichkeiten umfassen. Schließlich kann es sein, dass das verwendete Marktportfolio nicht effizient ist (das gilt für den S&P 500 in Beispiel 14). Für eine ausführliche Diskussion über Tests des CAPM verweisen wir auf Elton/Gruber[6], S.341–367.

Aufgabe 8: Erheben Sie Zeitreihen von sechs bis zehn einzelnen Aktien und eines geeigneten Aktienindex von `finance.yahoo.com` oder einer anderen Quelle. Schätzen Sie für jede Aktie μ_i und β_i. Verwenden Sie diese Schätzwerte zum Test des CAPM anhand einer geschätzten SML. Überprüfen Sie, ob der Index (das 'Marktportfolio') effizient ist.

3.7 Arbitrage Pricing Theory (APT)

Das CAPM ist ein Gleichgewichtsmodell, das auf dem Verhalten von Investoren und der Zusammenstellung von effizienten Portfolios beruht. Die Arbitrage Pricing Theory (APT) beruht auf der Annahme eines Mehrfaktormodells. Demnach werden die Renditen von Wertpapieren einerseits von (wenigen) Faktoren beeinflusst, die für alle Wertpapiere mehr oder weniger relevant sind und andererseits von einem zufälligen, aktienspezifischen Faktor, der nur für das jeweilige Wertpapier relevant ist. Die Theorie sagt zwar nichts darüber aus, um welche Faktoren es sich handelt, aber üblicherweise werden Faktoren wie Zinsen, Ölpreise, Industrieproduktion und Wechselkurse als Beispiele genannt. Die Modellgleichung der APT entspricht dem Mehrfaktormodell (13):

$$R_i = \alpha_i + \beta_{i1}F_1 + \cdots + \beta_{ik}F_k + e_i.$$

Die Renditen einer Ölgesellschaft werden z.B. stärker auf den Ölpreis-Faktor reagieren als die Renditen eines Pharmakonzerns, was sich in einem (relativ) größeren Beta für den Ölpreisfaktor der Ölgesellschaft zeigen würde.

Auch für die APT gelten Überlegungen, die schon vom CAPM bekannt sind: Das Risiko, das durch die Faktoren repräsentiert wird, kann durch Diversifikation nicht eliminiert werden. Das aktienspezifische Risiko kann jedoch durch Portfoliobildung eliminiert werden. Eine Risikoprämie erhält man jedoch nur für das systematische oder Faktor-Risiko. Nach der APT gilt daher für die erwartete Risikoprämie eines Wertpapiers oder Portfolios:

$$\mu_i - r_f = \beta_{i1}(\mathrm{E}[F_1] - r_f) + \cdots + \beta_{ik}(\mathrm{E}[F_k] - r_f).$$

Wenn ein Portfolio so gebildet wird, dass die Renditen *nicht* auf die Faktoren reagieren (d.h. β_{ik}=0 $\forall k$), dann sollte die erwartete Rendite dieses Portfolios gleich dem risikofreien Zinssatz sein. Wenn dieses Portfolio eine Rendite über der risikofreien Verzinsung hat, dann könnten Investoren einen risikolosen Gewinn (*arbitrage profit*) machen, indem sie das Portfolio kaufen und zum risikofreien Zinssatz finanzieren. Dieselbe Überlegung gilt aber auch für Portfolios, deren Beta-Faktoren ungleich null sind: weicht die (beobachtete) Risikoprämie eines Portfolios von der erwarteten Risikoprämie nach der APT ab, würden Arbitragemöglichkeiten bestehen, die schließlich zu einer Anpassung der realisierten an die erwarteten Renditen führen. Für eine ausführliche Darstellung der APT verweisen wir auf Elton/Gruber[6], Kapitel 16.

3.8 Mehrperiodige Portfolio-Optimierung mit stochastischen linearen Programmen

Die Darstellungen zur Portfolio-Optimierung in Kapitel 3 beruhten bisher auf der Annahme, dass das Portfolio nach einer Periode aufgelöst wird. Die Möglichkeit einer weiteren Veranlagung nach einer eventuellen Umschichtung wurde nicht in Betracht gezogen. Wir erweitern die Problemstellung daher so, dass die optimale Zusammensetzung bzw. Umschichtung eines Portfolios in *mehreren* zukünftigen Zeitpunkten optimiert werden soll.

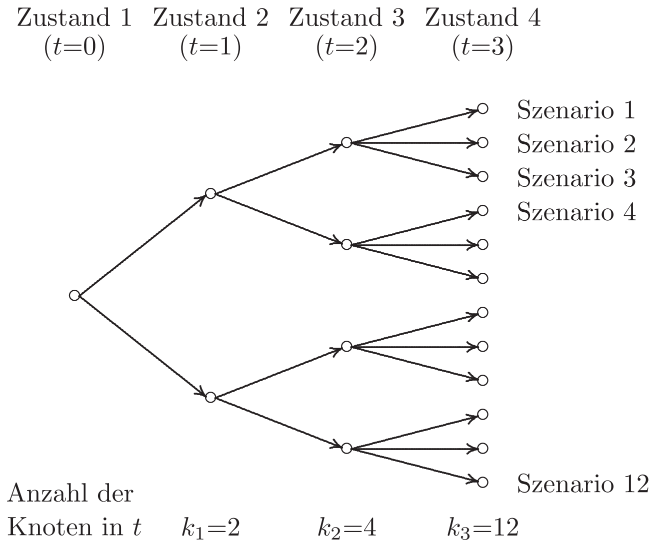
Wir betrachten folgende Entscheidungssituation. Ein Investor hat n Wertpapiere zur Auswahl. Er kann jetzt (in t=0) und in den folgenden Zeitpunkten t=1 bis t=T–1 Wertpapiere kaufen und/oder verkaufen. Der Erwartungsnutzen des Vermögens im Zeitpunkt t=T soll maximiert werden.

Die Unsicherheit im Rahmen des Entscheidungsproblems wird anhand von Szenarien beschrieben, die die statistischen Eigenschaften der Renditen abbilden. Ein Szenario-Baum (siehe Abb.9) ist durch die Anzahl der Perioden und die Anzahl der Pfade definiert, die von einem bestimmten Knoten ausgehen. In Abb.9 ist eine regelmäßige[10] 2-2-3 Struktur für ein Problem mit drei Perioden (das sind vier Zustände) dargestellt. Der Baum beginnt immer mit einem einzigen Knoten, der der Gegenwart entspricht (t=0). Entscheidungen werden in jedem Knoten getroffen und hängen sowohl vom aktuellen Zustand ab, der vorangegangene Entscheidungen reflektiert, als auch von den unsicheren zukünftige Pfaden ab.

Ein einzelnes Szenario s_t ist ein eindeutiger Pfad zwischen dem Knoten bei Zustand 1 und einem bestimmten Knoten im Zustand t. Ein Szenario ordnet den unsicheren Renditen konkrete Werte in jedem Zeitpunkt und Knoten zu. Zwei Szenarios s'_t und s''_t sind bis t–1 identisch und unterscheiden sich in den folgenden Perioden $t, \ldots, T$. Es gibt k_T Szenarien, wobei k_T als Produkt aus der Zahl der Verzweigungen berechnet wird (z.B. k_3=2·2·3=12 in Abb.9). Jedem Szenario wird eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zugeordnet, wobei meist von einer Gleichverteilung ausgegangen wird (d.h. jedes Szenario hat Wahrscheinlichkeit

[10] Bei einer unregelmäßigen Struktur variiert die Anzahl der Pfade, die Knoten bei einem bestimmten Zustand verlässt.

Abb.9: Szenario-Baum mit regelmäßiger 2-2-3 Struktur.



$1/k_T$). Die Menge aller Szenarios s_T und deren Wahrscheinlichkeiten bilden eine komplette Beschreibung der Unsicherheit des Modells.

Die Verwendung von Szenario-Bäumen ist vor allem dann sinnvoll, wenn die statistischen Eigenschaften der Renditen sich im Zeitablauf ändern. Dieser Ansatz bietet die Möglichkeit, Abhängigkeiten zwischen den Renditen verschiedener Perioden zu berücksichtigen. Üblicherweise wird ein große Anzahl von Szenarien benötigt, um die statistischen Eigenschaften der Renditen ausreichend präzise zu beschreiben.

Vermögensentwicklung

Die Entscheidungssituation wird als mehrperiodiges, lineares Programm formuliert. Dazu definieren wir folgende Entscheidungsvariablen: w_{i0} ist der aktuelle Marktwert des i-ten Wertpapiers, *bevor* eine Umschichtung (Kauf oder Verkauf) stattgefunden hat. $\tilde{W}_{it}$ ist der Wert nach Umschichtung im Zeitpunkt t, wobei eine Tilde den Umstand bezeichnet, dass eine Entscheidungsvariable für jedes Szenario einen anderen Wert annimmt. $\tilde{P}_{it}$ und $\tilde{S}_{it}$ bezeichnen Aus- und Einzahlungen, die durch Kauf und Verkauf des i-ten Wertpapiers im Zeitpunkt t ausgelöst werden. $\tilde{R}_{it}$ bezeichnet die Rendite des i-ten Wertpapiers im Zeitraum zwischen t–1 und t. Die Wertentwicklung des Vermögens für das i-te Wertpapier kann daher mit folgenden Nebenbedingungen beschrieben werden:

$$\tilde{W}_{it} = (1 + \tilde{R}_{it})\tilde{W}_{i,t-1} + \tilde{P}_{it} - \tilde{S}_{it}.$$

Budgetbeschränkungen

In jedem Zeitpunkt muss die Summe der Auszahlungen aus dem Kauf von Wertpapieren (zuzüglich Transaktionskosten c_i^p) gleich den Einzahlungen aus Verkäufen (abzüglich Transaktionskosten c_i^s) sein:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{P}_{it}(1 + c_i^p) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{S}_{it}(1 - c_i^s).$$

Leerverkäufe

Wenn keine Leerverkäufe zugelassen sind, können die folgenden Nebenbedingungen hinzugefügt werden:

$$\tilde{S}_{it} \leq (1 + \tilde{R}_{it})\tilde{W}_{i,t-1}.$$

Die maximal erzielbare Einzahlung aus dem Verkauf eines Wertpapiers kann nicht größer als dessen aktueller Wert sein.

Beschränkung von Anteilen

Wenn für einzelne Wertpapiere Höchst- oder Mindestanteile im Portfolio vorgegeben sind, kann dies mit den folgenden Beschränkungen berücksichtigt werden:

$$\tilde{W}_{it} \leq U_i \sum_{i=1}^{n} \tilde{W}_{it} \qquad \tilde{W}_{it} \geq L_i \sum_{i=1}^{n} \tilde{W}_{it},$$

wobei U_i der Höchstanteil (Prozentsatz) und L_i der Mindestanteil von Wertpapier i im Portfolio ist.

Zielfunktion

Es wird der Erwartungsnutzen des Vermögens im Zeitpunkt T maximiert:

$$\mathrm{E}\left[U\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{W}_{iT}\right)\right] \longrightarrow \max.$$

Der Erwartungswert wird über alle Szenarien gebildet. Wenn jedes Szenario gleich wahrscheinlich ist, dann ist der Erwartungsnutzen gleich dem Mittelwert über die Nutzenwerte der einzelnen Szenarien.

Lösungsverfahren

Zur Lösung des stochastischen Optimierungsproblems werden Entscheidungsvariablen für jedes Szenario und jede Periode definiert. Man kann sich die Konstruktion dieses linearen Programms (mit nichtlinearer Zielfunktion) so vorstellen, dass man zunächst die Nebenbedingungen für ein einziges Szenario formuliert. Das nächste Szenario wird hinzugefügt, indem die Struktur des ersten Szenarios kopiert wird. Dabei werden jedoch die entsprechenden Renditen des zweiten Szenarios verwendet. Außerdem müssen zusätzliche Entscheidungsvariablen definiert werden, die *nur* für das neu hinzugekommene Szenario Gültigkeit haben. Dabei ist zu beachten, dass die so genannte *nicht-antizipierende* Bedingung erfüllt wird. Demnach muss eine Entscheidungsvariable, die einem bestimmten Knoten zugeordnet wird, für alle Szenarien identisch sein, die diesen Knoten verlassen.

Bei einer großen Anzahl von Szenarien und vielen Perioden resultieren sehr große Programme, die allerdings sehr dünn besetzt sind. Es gibt daher entsprechende Algorithmen, die die Struktur dieser Problemstellungen berücksichtigen. Weitere Hinweise zur Lösung von stochastischen (und anderen) Optimierungsproblemen findet man unter `stoprog.org` oder `www-neos.mcs.anl.gov`.

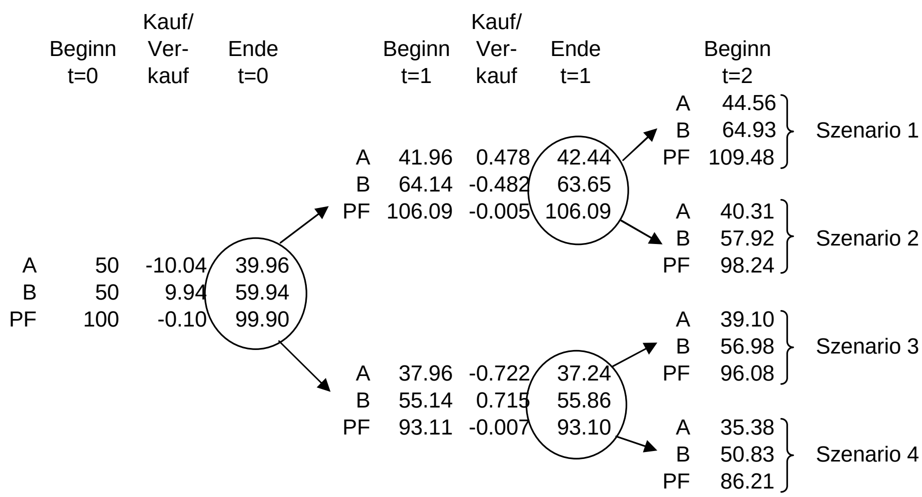
Beispiel 15: Wir betrachten einen sehr einfachen Fall mit zwei Wertpapieren A und B, zwei Perioden (drei Zeitpunkte) und einer binären Baumstruktur. Die (Brutto)Renditen in den jeweiligen Knoten sind in der folgenden Tabelle angegeben:

	A(t=1)	B(t=1)	A(t=2)	B(t=2)
Szenario 1	1.05	1.07	1.05	1.02
Szenario 2	1.05	1.07	0.95	0.91
Szenario 3	0.95	0.92	1.05	1.02
Szenario 4	0.95	0.92	0.95	0.91

Der aktuelle Marktwert beider Wertpapiere beträgt je 50 GE, der Anteil von A im Portfolio darf nicht größer als 40% sein, die Transaktionskosten betragen 0.5% und die Risikoaversion beträgt $4/w_0$=0.04.

Die optimale Lösung ist in Abb.10 dargestellt. Wertpapier A hat in beiden Perioden dieselbe Verteilung der Renditen. In t=1 ist A weniger riskant als B, in t=2 ist A riskanter. Aus der Lösung kann man ableiten, dass zunächst in das riskantere Wertpapier B investiert wird. Zwischen t=0 und t=1 steigt oder fällt der Wert der Wertpapiere. In t=1 werden je nach Zustand, unterschiedliche Umschichtungen vorgenommen. Sind beide Werte gestiegen, wird eher in das (in der folgenden Periode) riskantere Wertpapier A investiert. Wenn die Werte gefallen sind, wird eher zugunsten von B umgeschichtet. Die optimale Lösung eines stochastischen linearen Programmens enthält daher implizite, zustandsabhängige Entscheidungsregeln.

Abb.10: Optimale Lösung von Beispiel 15.



4 Anleihen

4.1 Definitionen

Eine Anleihe verbrieft die Verpflichtung eines Schuldners zur Leistung von zukünftigen Zahlungen zu vorher festgelegten Zeitpunkten an den Zeichner der Anleihe. Diese Zahlungen bestehen aus den Kupons (Zinszahlungen), die als Prozentsatz vom Nominalbetrag der Anleihe angegeben werden und der Rückzahlung des Kapitals (Tilgung).

Wir betrachten zunächst eine Nullkupon-Anleihe (*zero bond; pure discount bond*). Bei dieser Anleihe gibt es nur eine zukünftige Zahlung C_m, die m Perioden in der Zukunft anfällt (z.B. zum Zeitpunkt $t{+}m$ wenn t die Gegenwart ist). Der (Markt)Preis P dieser Anleihe sollte theoretisch gleich dem Barwert von C_m sein:

$$P = C_0 = C_m \exp\{-mz\}.$$

Der (implizite) Zinssatz z der zur Abzinsung von C_m verwendet wird, wird als **Spot-Rate** (*zero-bond rate*) für die Laufzeit (Fristigkeit) m bezeichnet.

Wir betrachten nun Zahlungen $C_1, C_2, \ldots, C_J$, die $m_1, m_2, \ldots, m_J$ Zeiteinheiten in der Zukunft anfallen. Die letzte Zahlung C_J enthält auch die Tilgung. Mit dem Begriff 'Laufzeit' (*maturity*) bezeichnet man üblicherweise die Gesamtlaufzeit m_J im Zeitpunkt der Emission einer Anleihe. Der Begriff wird jedoch auch auf die einzelnen Zeitintervalle m_j angewendet.

Wenn der Preis dieser Anleihe gegeben ist, dann existieren Spot-Rates z_j ($j{=}1, \ldots, J$), so dass die Gleichung

$$P = C_0 = \sum_{j=1}^{J} C_j \exp\{-m_j z_j\}$$

erfüllt ist. Die Spot-Rates als Funktion von m_j heißen **Zinsstruktur** (oder Fristigkeitsstruktur der Zinssätze). Die Spot-Rates können zur Bewertung (Abzinsung) von zukünftigen Zahlungen verwendet werden. In Kapitel 4.2 wird gezeigt, wie die Zinsstruktur aus historischen Daten von Kupon- und Nullkupon-Anleihen geschätzt werden kann.

Eine andere häufig verwendete Beziehung zwischen Zahlungen und Preisen beruht auf der **Rendite** (*yield (to maturity)*). In diesem Fall wird ein einziger Zinssatz y zur Abzinsung aller zukünftiger Zahlungen verwendet:

$$P = C_0 = \sum_{j=1}^{J} C_j \exp\{-m_j y\}.$$

Die Rendite ist der interne Zinssatz der Zahlungen C_j, wobei angenommen wird, dass alle Kuponzahlungen mit demselben Zinssatz y wieder veranlagt werden. Das entspricht der Annahme einer *flachen* Zinsstruktur mit identischen Spot-Rates für jede Laufzeit. Zu unterscheiden sind die Begriffe *yield curve* und *zero-coupon yield curve*. Im ersten Fall wird y aus Anleihen mit verschiedenen (Gesamt)Laufzeiten m_J ermittelt. Im zweiten Fall handelt es sich um die Funktion der Spot-Rates z_j in Abhängigkeit von m_j. Meist wird der Begriff 'Zinsen' zur Vereinfachung sowohl für Yields als auch für Spot-Rates verwendet.

Zu beachten ist, dass sich m_j und daher auch P und z_j in jedem Zeitpunkt t verändern. Es müssen daher zwei Zeitdimensionen unterschieden werden. Eine Dimension ist die Kalenderzeit, die angibt, zu welchen Zeitpunkten Preise P_t einer Anleihe beobachtet werden. Die zweite Dimension ist die Fristigkeit – das Zeitintervall bis zur Tilgung eines Zero-Bonds (m_J) oder bis zur Fälligkeit einer Kuponzahlung (m_j). Daher sollte der Index t hinzugefügt werden, wenn auch die Abhängigkeit von der Kalenderzeit ausgedrückt werden soll:

$$P_t = \sum_{j=1}^{J_t} C_j \exp\{-m_{tj} z_{tj}\}.$$

Die aktuelle Zinsstruktur hat auch Implikationen für zukünftige Zinsen. Zur Erläuterung der so genannten **Forward-Rates** betrachten wir zunächst die Spot-Rate für eine Fristigkeit von zwei Jahren. Eine Zahlung mit Barwert C_0 hat in zwei Jahren (m=2) den Wert

$$C_2 = C_0 \exp\{2z_2\},$$

wobei z_2 die Spot-Rate eines Zero-Bonds mit einer Fristigkeit von m=2 Jahren ist. Diese Spot-Rate kann in zwei Komponenten zerlegt werden: die einjährige Spot-Rate z_1, die jetzt gilt und die (implizite) einjährige Forward-Rate[11] $f_{1,2}$ – das ist der einjährige Zinssatz, der in einem Jahr (genau: während des zweiten Jahres) gelten muss, damit die Zahlung im Zeitpunkt t=2 denselben Wert hat, wie bei einer Verzinsung mit z_2 für zwei Jahre:

$$\exp\{2z_2\} = \exp\{z_1\} \exp\{f_{1,2}\}.$$

Zu beachten ist, dass diese Forward-Rate nicht notwendigerweise identisch mit der einjährigen Spot-Rate sein muss, die in einem Jahr tatsächlich gelten wird. Die (unverzerrte) Erwartungshypothese der Zinsstruktur besagt jedoch, dass die Forward-Rate gleich der *erwarteten* zukünftigen Spot-Rate ist. Allerdings berücksichtigt die Erwartungshypothese keine Prämien für Risiko, Fristigkeit und Liquidität. Die Existenz solcher Prämien kann empirisch nicht widerlegt werden.

Im allgemeinen gilt für die *einjährige* Forward-Rate folgende Beziehung:

$$\exp\{mz_m\} = \exp\{(m-1)z_{m-1}\} \exp\{f_{1,m}\},$$

oder vereinfacht

$$mz_m = (m-1)z_{m-1} + f_{1,m} \quad \Longrightarrow \quad f_{1,m} = mz_m - (m-1)z_{m-1}.$$

Beispiel 16: Die Spot-Rates für Fristigkeiten von vier und fünf Jahren betragen 3.5% bzw. 4%. Die einjährige Forward-Rate ist der einjährige Zinssatz, der in vier Jahren (während des fünften Jahres) gelten muss:

$$f_{1,5} = 5 \cdot 0.04 - 4 \cdot 0.035 = 0.06.$$

Die Forward-Rate ist deutlich größer als die beiden Spot-Rates, weil eine vierjährige Veranlagung einem Aufzinsungsfaktor von $\exp\{0.035 \cdot 4\}$=1.15 und die fünfjährige Veranlagung einen Faktor von 1.22 hat. Um diesen Unterschied auszugleichen, muss der einjährige Zinssatz im fünften Jahr entsprechend groß sein.

Wenn die Zinsstruktur einen fallenden Verlauf hat (z.B. wenn die Spot-Rates für vier und fünf Jahre 4% bzw. 3.5% sind), dann beträgt die Forward-Rate 1.5%. Das zeigt, dass die Kurve der Forward-Rates über (unter) der Spot-Rate Kurve liegt, wenn die Zinsstruktur ansteigend (fallend) verläuft.

[11] Auch die Forward-Rate hängt vom aktuellen Zeitpunkt ab. Auf die Kennzeichnung dieser Abhängigkeit mit dem Index t wird hier jedoch verzichtet.

Forward-Rates können auch für andere Zeiträume definiert werden. Die Forward-Rate $f_{h,m}$ gibt den Zinssatz an, der in m–h Perioden für einen Zeitraum von h gilt. Diese Forward-Rate kann aus den Spot-Rates in m und m–h wie folgt berechnet werden:

$$f_{h,m} = \frac{mz_m - (m-h)z_{m-h}}{h}.$$

Für Zeiträume, die kürzer als ein Jahr sind, wird üblicherweise mit einfacher Verzinsung gerechnet. In diesem Fall wird die Forward-Rate wie folgt berechnet:

$$f_{h,m} = \frac{1}{h}\left[\frac{(1+mz_m)}{(1+(m-h)z_{m-h})} - 1\right] \qquad h,m < 1.$$

Beispiel 17: Die Spot-Rates für vier und sieben Monate betragen 1.13% bzw. 1.194%. Die dreimonatige Forward-Rate ist der Zinssatz, der in vier Monaten (für drei Monate) gelten muss (h=3/12; m=7/12):

$$f_{\frac{3}{12},\frac{7}{12}} = \frac{12}{3}\left[\frac{(1+0.0194 \cdot 7/12)}{(1+0.0113 \cdot (7-3)/12)} - 1\right] = 0.01274.$$

4.2 Schätzung der Zinsstruktur

Zur Bestimmung der Spot-Rates einer Kuponanleihe könnte man (theoretisch) Nullkupon-Anleihen verwenden, die genau jene Laufzeiten haben, die den Fristigkeiten der Zahlungen der Kuponanleihe entsprechen. Diese 'ideale' Situation kommt praktisch jedoch nicht (oder sehr selten) vor.

Beispiel 18: Eine Nullkupon-Anleihe hat derzeit einen Preis von 102.5 und bringt in m=2 eine Einzahlung von 115. Eine Kuponanleihe hat einen Preis von 102 bei Einzahlungen von C_1=7 und C_2=107. Wie hoch sind die Spot-Rates z_1 und z_2?
Aus dem Zero-Bond erhält man z_2=$(115/102.5)^{1/2}$–1=0.0592. Daher muss für z_1 gelten:

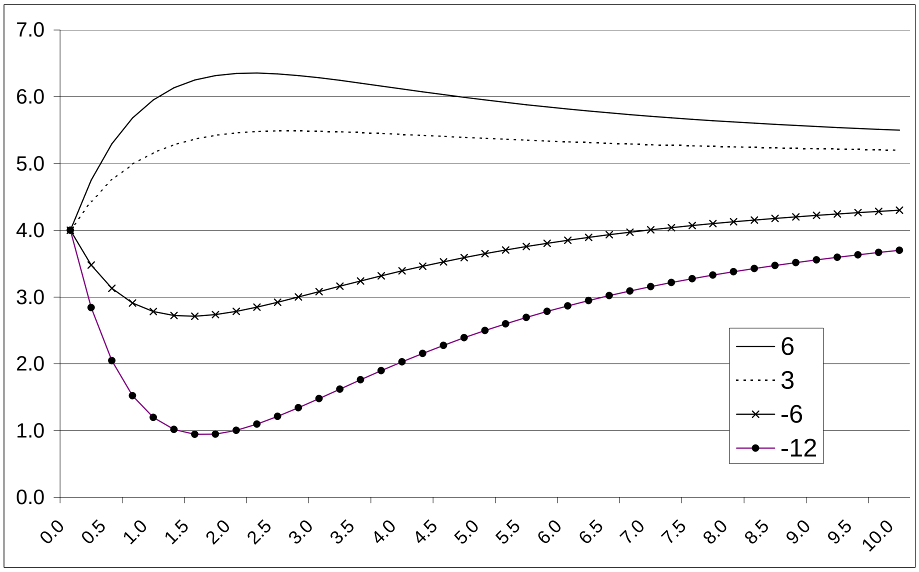
$$102 = 7(1+z_1)^{-1} + 107(1.0593)^{-2} \quad \Longrightarrow \quad z_1 = 0.0557.$$

Wenn die Einzahlung des Zero-Bonds nicht in m=2 sondern z.B. in m=1.9 anfällt, kann man in diesem Beispiel die beiden Spot-Rates nicht direkt bestimmen.

Im allgemeinen werden für die Schätzung der Zinsstruktur beobachtete Marktpreise von mehreren Anleihen verwendet. Für jede Anleihe müssen die zukünftigen Zahlungen (Betrag und Zeitpunkt) bekannt sein. Auf Anleihemärkten werden so genannte *clean prices* quotiert. Wenn eine Transaktion getätigt wird, dann erhält der Verkäufer auch die (anteiligen) Stückzinsen (*accrued interest*), die seit der letzten Kuponzahlung aufgelaufen sind. Der Preis inklusive Stückzinsen heißt *dirty price* und entspricht dem tatsächlichen Marktwert der Anleihe. Die Stückzinsen A werden als Bruchteil des Kupons berechnet: A=C/n, wobei n die Anzahl der Tage seit der letzten Kuponzahlung bezeichnet. Es gibt mehrere Konventionen zur Berechnung der Stückzinsen (z.B. ein Jahr hat 360 oder 365 Tage).

Die Zinsstruktur ist als stetige Funktion der Fristigkeit definiert. Dadurch wird es möglich jede Zahlung zu jedem beliebigen Zeitpunkt in der Zukunft zu bewerten (d.h. mit der entsprechenden Spot-Rate abzuzinsen). Bei der Schätzung der Zinsstruktur müssen folgende Probleme gelöst werden. Erstens werden mehrere Anleihen gehandelt deren Fristigkeiten nur eine diskrete Anzahl von Punkten der Zinsstruktur abdecken. Zweitens implizieren die Preise mehrerer Anleihen im allgemeinen keine eindeutige Spot-Rate für eine bestimmte Fristigkeit.

Abb.11: Verlauf der Spot-Rates nach Nelson/Siegel für β_0=5, β_1=-1 τ=1 und verschiedene Werte des Parameters β_2.



Die Zinsstruktur kann jedoch geschätzt werden, wenn eine Funktion zwischen Spot-Rates und Fristigkeit unterstellt wird. Dafür können im einfachsten Falle Polynome dritter oder vierter Ordnung in m verwendet werden. Nelson/Siegel[14] haben eine flexible Funktion für die Spot-Rate vorgeschlagen, die wie folgt definiert ist:

$$z(m,\boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1-\exp\{-m/\tau\}}{(-m/\tau)}\right] + \beta_2 \left[\frac{1-\exp\{-m/\tau\}}{(-m/\tau)} - \exp\{-m/\tau\}\right].$$

Die Notation $z(m,\boldsymbol{\beta})$ soll die Abhängigkeit der Spot-Rates von den Fristigkeiten und den Parametern betonen. Die Parameter $\boldsymbol{\beta}$=$\{\beta_0,\beta_1,\beta_2,\tau\}$ bestimmen den Verlauf der Kurve und können wie folgt interpretiert werden. β_0 ist der Grenzwert der Spot-Rate, wenn die Fristigkeit gegen unendlich geht; β_0 entspricht daher einem Zinssatz für eine sehr lange Fristigkeit (im Grenzwert stimmen Forward- und Spot-Rate überein). Wenn die Fristigkeit gegen Null geht, dann konvergiert die Spot-Rate gegen die Summe β_0+β_1. Dies kann als Momentanverzinsung interpretiert werden. Daraus folgt weiters, dass $-\beta_1$ als Maß für den Anstieg der Zinskurve (der auch als *spread* bezeichnet wird) interpretiert werden kann. Die Parameter β_2 und τ bestimmen die Form der Kurve und haben keine Interpretation.

Die Spot-Rate Kurven nach Nelson/Siegel implizieren eine große Vielfalt von möglichen Verläufen. Spot-Rates können monoton steigen oder fallen, U-förmig (normal und invers) verlaufen, und auch S-förmig sein. Abb.11 zeigt die Flexibilität des Modells. Die Parameter der Funktion werden so geschätzt, dass die Preise aus dem Modell möglichst genau mit den beobachteten dirty Preisen übereinstimmen. Dazu wird das Prinzip der kleinsten Quadratsumme verwendet:

$$\sum_{i=1}^{n}(P_i-\hat{P}_i)^2 \longrightarrow \min,$$

wobei $\hat{P}_i$ der Preis der i-ten Anleihe in Abhängigkeit der zu schätzenden Parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

ist[12]:

$$\hat{P}_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sum_{j=1}^{J_i} C_j \exp\{-m_{ij} z(m_{ij}, \hat{\boldsymbol{\beta}})\}.$$

Um Zeitreihen[13] von Spot-Rates zu bilden, werden für jeden gewünschten (Kalender)Zeitpunkt Spot-Rate-Kurven geschätzt. Man erhält so eine Zeitreihe von Parametern $\boldsymbol{\beta}$. Anschließend werden die Fristigkeiten[14] konstant gehalten und in die Spot-Rate Funktion für eine Reihe von Zeitpunkten (mit den jeweiligen Schätzwerten $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ für diese Zeitpunkte) eingesetzt.

4.3 Duration und Immunisierung

4.3.1 Duration

Wir betrachten nun die Veränderung des Barwerts einer Anleihe, wenn sich der Zinssatz ändert. Wir nehmen dazu eine flache Zinskurve an; d.h. Yield und Spot-Rate sind identisch gleich r. Die folgenden Überlegungen beruhen auf der Taylor-Reihe

$$C_0(r) = C_0(r+\Delta r) + C_0'(r+\Delta r)\Delta r + 0.5 C_0''(r+\Delta r)\Delta r^2 + \cdots$$

sodass,

$$\Delta C_0 = C_0(r) - C_0(r+\Delta r) = C_0'(r+\Delta r)\Delta r + 0.5 C_0''(r+\Delta r)\Delta r^2 + \cdots.$$

Wir betrachten zunächst eine Nullkupon-Anleihe mit Fälligkeit m:

$$C_0 = C_m \cdot (1+r)^{-m} \qquad C_0 = C_m \cdot \exp\{-rm\}.$$

Bildet man die erste Ableitung nach r erhält man

$$\frac{dC_0}{dr} = -mC_m \cdot (1+r)^{-m-1} = -\frac{mC_m}{(1+r)^{m+1}} = -\frac{mC_0 \cdot (1+r)^m}{(1+r)^{m+1}} = -\frac{mC_0}{(1+r)};$$

$$C_0 = C_m \mathrm{e}^{-rm} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dC_0}{dr} = -mC_m \mathrm{e}^{-rm} = -mC_0 \mathrm{e}^{rm} \mathrm{e}^{-rm} = -mC_0.$$

Wenn man nur das erste Glied der Taylor-Reihe berücksichtigt, erhält man für die (approximierte) Änderung im Barwert

$$\Delta C_0 = C_0' \Delta r.$$

Beispiel 19: C_m=50; m=5; r=0.05; C_0=39.176. Wir berechnen die Änderung in C_0, wenn r auf 0.049 fällt (diskrete Verzinsung):

$$\frac{dC_0}{dr} = -5 \cdot 50 \cdot 1.05^{-6} = -186.5538 \quad \Longrightarrow \quad \Delta C_0 = C_0' \Delta r = 0.18655.$$

[12] Der Index für den Zeitpunkt wird hier weggelassen.

[13] Solche Zeitreihen findet man z.B. unter `http://www.federalreserve.gov/Releases/h15/data.htm`.

[14] Meist werden dazu Fristigkeiten von einem bis zwölf Monaten und zwei bis zehn Jahren gewählt.

Für eine Kuponanleihe mit Fristigkeit m gilt:

$$C_0 = \sum_{t=1}^{m} C_t \cdot (1+r)^{-t}$$

$$\frac{dC_0}{dr} = -\sum_{t=1}^{m} \frac{t \cdot C_t}{(1+r)^{t+1}} = -\frac{1}{(1+r)} \sum_{t=1}^{m} \frac{t \cdot C_t}{(1+r)^t}.$$

Die (Macauley) **Duration** einer Anleihe ist wie folgt definiert:

$$D = \frac{1}{C_0} \sum_{t=1}^{m} \frac{t \cdot C_t}{(1+r)^t}.$$

Bei stetiger Verzinsung gelten folgende Formeln:

$$C_0 = \sum_{t=1}^{m} C_t \mathrm{e}^{-rt} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dC_0}{dr} = -\sum_{t=1}^{m} t \cdot C_t \mathrm{e}^{-rt}$$

$$D = \frac{1}{C_0} \sum_{t=1}^{m} t \cdot C_t \mathrm{e}^{-rt} \qquad \Longrightarrow \qquad D = -\frac{1}{C_0} \frac{dC_0}{dr}.$$

Die Duration ist ein gewichteter Durchschnitt der Fristigkeiten einer Anleihe, wobei als Gewicht der Barwert der einzelnen Zahlungen dividiert durch den Barwert der Anleihe verwendet wird. Die Duration wird vor allem als Maß für das Risiko von Anleihen verwendet, weil sie als (Zins)Elastizität dargestellt werden kann (diskrete Verzinsung):

$$\frac{dC_0}{dr} = -\frac{D \cdot C_0}{(1+r)} \qquad \Longrightarrow \qquad D = -\frac{\dfrac{dC_0}{C_0}}{\dfrac{dr}{(1+r)}} = -\frac{dC_0}{dr} \cdot \frac{(1+r)}{C_0}.$$

Je größer die Duration, desto größer ist die Wirkung von Zinsänderungen auf den Barwert. Die Duration einer Nullkupon-Anleihe D_{zb} ist gleich dem Zeitraum bis zur Fälligkeit

$$D_{\mathrm{zb}} = \frac{mC_0}{(1+r)} \cdot \frac{(1+r)}{C_0} = m.$$

Für die Approximation erster Ordnung der Änderung im Barwert wird die **modifizierte Duration** (*modified duration*) verwendet:

$$MD = \frac{D}{(1+r)} = -\frac{C_0'}{C_0} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta C_0 = -MD \cdot C_0 \cdot \Delta r.$$

Beispiel 20: C_0=100, r=0.05, m=5, D=4.54595. Wir verwenden die Duration um die prozentuelle Änderung in C_0 zu approximieren, wenn r auf 0.049 fällt:

$$\frac{\Delta C_0}{C_0} = -\frac{D \cdot \Delta r}{(1+r)} = -MD \cdot \Delta r = -\frac{4.54595 \cdot (-0.001)}{1.05} = 0.43295\%$$

4.3.2 Immunisierung

Eine wichtige Anwendung der Duration erfolgt im Rahmen der **Immunisierung**. Die Zielsetzung besteht darin, den Wert einer zukünftigen Zahlung *unabhängig* von Änderungen im Zinssatz zu machen. Dazu sei folgende Situation betrachtet. Ein Unternehmen muss im Zeitpunkt $t{=}m$ eine Zahlung in Höhe von L_m leisten. Der Barwert dieser Zahlung ist $L_0{=}L_m/(1{+}r)^m$. Das Unternehmen hält eine Kuponanleihe, die zur Abdeckung dieser Verpflichtung verwendet werden soll. Der Barwert der Anleihe ist

$$C_0 = \sum_{j=1}^{J} C_j \cdot (1+r)^{-m_j},$$

wobei genau so viele Anleihen gezeichnet werden, dass $L_0{=}C_0$.

Angenommen, der Zinssatz ändert sich von r auf $r{+}\Delta r$. Dadurch ändert sich L_0 auf (unter Verwendung der Taylor-Reihe)

$$L_0 - \frac{\Delta r}{1+r}\left[\frac{m \cdot L_m}{(1+r)^m}\right]$$

und der Barwert der Anleihen ändert sich auf

$$C_0 - \frac{\Delta r}{1+r}\left[\sum_{t=1}^{m} \frac{t \cdot C_t}{(1+r)^t}\right].$$

Die Zinsänderung hat genau dann keinen Einfluss, wenn die beiden Ausdrücke in eckigen Klammern gleich sind:

$$\frac{m \cdot L_m}{(1+r)^m} = \sum_{t=1}^{m} \frac{t \cdot C_t}{(1+r)^t}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite entspricht der Duration der Anleihe multipliziert mit ihrem Barwert C_0. Der Ausdruck auf der linken Seite entspricht dem Zeitpunkt der Fälligkeit der Verpflichtung multipliziert mit ihrem Barwert L_0:

$$m \cdot L_0 = D \cdot C_0 \quad \Longrightarrow \quad m = D.$$

Weil die beiden Barwerte L_0 und C_0 gleich sind, kann man aus dieser Beziehung folgenden Schluss ziehen: Zinsänderungen haben keinen Effekt, wenn die Duration der Anleihe so gewählt wird, dass sie genau gleich der Zeit m bis zur Fälligkeit der Zahlung L_m ist. Das Unternehmen ist dann bezüglich dieser Verpflichtung *immun* gegen Zinsänderungen.

Beispiel 21: Wir betrachten eine Verpflichtung L_m=9000, die im Zeitpunkt m=10 fällig wird. Der aktuelle Zinssatz beträgt r=0.05. Die folgenden Anleihen stehen zur Wahl, um diese Verpflichtung abzudecken:

	Anleihe 1	**Anleihe 2**	**Anleihe 3**
Kupon-Rate	0.060	0.062	0.065
Laufzeit	12	14	20
Nominale	1000	1000	1000
Duration	9.03	10.00	12.43
Barwert	1088.63	1118.78	1186.93
Endwert in t=m	1773.27	1822.38	1933.39
Anzahl	5.07538	4.93859	4.65504
Kauf Nominale	5075.38	4938.59	4655.04
Kupon	304.52	306.19	302.58

Die erforderliche Anzahl der zu haltenden Anleihen beträgt L_m/C_m (z.B. für Anleihe 1 9000/1773.27=5.07538).

Wenn der Zinssatz gleich bleibt sind grundsätzlich alle drei Anleihen zur Abdeckung von L_m geeignet. Wenn die Kuponzahlungen zum Zinssatz r=0.05 reinvestiert werden, beträgt deren Gesamtwert nach zehn Jahren (z.B. für Anleihe 3):

$$\sum_{t=0}^{9} 302.58 \cdot (1+0.05)^t = 3805.79.$$

Dazu kommt der Barwert der restlichen Kuponzahlungen und der Tilgung (z.B. bei 10 Jahren Restlaufzeit der Anleihe 3):

$$\sum_{t=1}^{10} 302.58 \cdot (1+0.05)^{-t} + 4655.04 \cdot (1+0.05)^{-10} = 2336.42 + 2857.79 = 5194.21.$$

Die Summe aus 3805.79 (Reinvestition) und 5194.21 (zukünftige Einzahlungen) entspricht genau dem Wert der Verpflichtung in m=10. Dies gilt für alle drei Anleihen.

Wenn der Zinssatz z.B. auf r=0.049 fällt, betragen die Werte der drei Anleihen 8991.75, 9000.11 und 9021.03. Man erkennt, dass nur mit Anleihe 2, deren Duration genau der Fristigkeit der Verpflichtung entspricht, eine (fast perfekte) Immunisierung gegen Zinsänderungen erreicht werden kann.

Wenn keine einzelne Anleihe verfügbar ist, die eine gewünschte Duration aufweist, kann man ein Portfolio aus Anleihen bilden. Die Gewichte der Anleihen werden so bestimmt, dass die gewichtete Summe der Durations der erforderlichen Duration entspricht.

Beispiel 22: Wir suchen zunächst eine gewichtete Summe aus den Durations der Anleihen 1 und 3 aus Beispiel 21, die zehn Jahre beträgt:

$$9.03x + 12.43(1-x) = 10 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.7138.$$

Beim Kauf eines Nominale von

$$5075.38 \cdot 0.7138 + 4655.04(1-0.7138) = 4955.06$$

erhält man ein Portfolio aus Anleihe 1 und 3, mit dem man fast die gleiche Immunisierung erzielen kann, wie mit Anleihe 2.

Zu beachten ist allerdings, dass diese Strategie zur Immunisierung gegen Zinsänderungen unter bestimmten Bedingungen abgeleitet wurde:

1. Die Herleitung des Prinzips zur Immunisierung erfolgte auf Basis der Duration, die proportional zur ersten Ableitung der Barwertfunktion ist. Dies entspricht einer Linearisierung einer nichtlinearen Funktion. Je stärker die Barwertfunktion an der betrachteten Stelle gekrümmt ist, desto ungenauer ist die Approximation der Wirkung einer Zinsänderung auf Basis der Duration.

2. Wir haben eine flache Zinskurve angenommen und keinen Unterschied zwischen Yield und Spot-Rate gemacht. Außerdem wurde angenommen, dass sich die Zinskurve parallel verschiebt; d.h. das Ausmaß einer Zinsänderung für alle Fristigkeiten gleich ist.

3. Schließlich muss darauf hingewiesen werden, dass eine dauerhafte Immunisierung nicht durch den *einmaligen* Kauf einer (geeigneten) Anleihe erreicht werden kann. Man muss laufend Anpassungen vornehmen, weil sich alleine durch den Zeitablauf die Duration ändert. Daher muss die Anzahl der Anleihen, die zur Abdeckung der Verpflichtung gehalten werden, ständig geändert werden.

Aufgabe 9: Sie versuchen eine Verpflichtung im Zeitpunkt m=10 (Jahre) mit Barwert 1000 gegen Zinsänderungen zu immunisieren. Der aktuelle Zinssatz beträgt 6%. Zur Verfügung stehen drei Anleihen mit einem Nominale von je 1000 und folgenden Eigenschaften:

	Anleihe 1	Anleihe 2	Anleihe 3
Kupon	0.067	0.06988	0.059
Laufzeit	10	15	30

Berechnen Sie die Duration, Barwert und Endwert (in m=10) für jede Anleihe. Welches Portfolio aus den drei Anleihen erzielt eine maximale Immunisierung gegen Zinsänderungen? Zeigen Sie die Wirkungsweise der Strategie anhand einer Zinsänderung auf 6.1%.

4.3.3 Konvexität

Wir greifen nun die erste der oben genannten Bedingungen auf. Auf Basis der zweiten Ableitung der Barwertfunktion

$$\frac{d^2C_0}{dr^2} = \sum_{t=1}^{m} \frac{t \cdot (t+1) \cdot C_t}{(1+r)^{t+2}}$$

kann die so genannte **Konvexität** definiert werden:

$$V = \frac{1}{C_0} \cdot \frac{d^2C_0}{dr^2} = C_0''/C_0.$$

Die Änderung im Barwert C_0 aufgrund von Zinsänderungen kann daher wie folgt approximiert werden (Taylor-Reihe zweiter Ordnung):

$$\Delta C_0 = C_0' \cdot \Delta r + 0.5 C_0'' \cdot \Delta r^2,$$

bzw. unter Verwendung von Modified Duration und Konvexität:

$$\Delta C_0 = -MD \cdot C_0 \cdot \Delta r + 0.5V \cdot C_0 \cdot \Delta r^2.$$

Beispiel 23: C_0=100, r=0.05, m=5, D=4.54595. Wir verwenden Duration und Konvexität um die prozentuelle Änderung in C_0 zu approximieren, wenn r auf 0.049 fällt:

$$\frac{\Delta C_0}{C_0} = -MD \cdot \Delta r + 0.5V \cdot \Delta r^2$$

$$-\frac{4.54595}{1.05} \cdot (-0.001) + 0.5 \cdot 23.936 \cdot (-0.001)^2 = 0.43414\%.$$

Eine verbesserte Immunisierung kann erreicht werden, wenn zusätzlich die zweite Ableitung von Verpflichtung und Anleihe gleich gesetzt wird. Wendet man diese Überlegung an erhält man die Bedingung

$$V = \frac{m \cdot (m+1)}{(1+r)^2}.$$

Wenn eine einzelne Anleihe beide Bedingungen (Duration und Konvexität) nicht erfüllt (was meist der Fall ist), sucht man nach einem Portfolio aus Anleihen mit den gewünschten Eigenschaften.

Beispiel 24: Wir erweitern die Angaben aus Beispiel 22 und berücksichtigen zusätzlich eine Anleihe 4 mit m=16 und einem Kupon von 6.3%. Das Portfolio aus den Anleihen 1, 2 und 4 soll eine Duration von 10 und eine Konvexität von $10\cdot 11/1.05^2$=99.77 aufweisen. Mit den Anteilen x_1=–1.24, x_3=–2.05 und x_3=4.29 kann ein Portfolio erstellt werden, das diese Bedingungen erfüllt. Die negativen Anteile entsprechen einer Kreditaufnahme (*short selling*). Wenn der Zinssatz auf 0.049 fällt, hat das Portfolio bei Fälligkeit der Verpflichtung genau den erforderlichen Wert von 9000. Der Wert der Anleihe 2 bei r=0.49 beträgt 9000.11.

5 Value-at-Risk

Value-at-Risk ist ein Maß für das Risiko, das aus Marktwertänderungen von Vermögenspositionen resultiert. Value-at-Risk gibt den (Mindest)Verlust an, der mit einer relativ geringen Wahrscheinlichkeit (meist 1% bis 5%) innerhalb eines bestimmten Zeitraums (meist ein bis zehn Tage) überschritten wird.

Value-at-Risk wurde zunächst hauptsächlich von Banken oder Investmenthäusern entwickelt und eingesetzt. Es ist jedoch nicht nur für Banken relevant, sondern für alle Unternehmen und Institutionen, deren Vermögen den Preisänderungen auf Finanzmärkten ausgesetzt ist. Die wichtigsten 'Preise' sind Zinsen, Aktien- und Wechselkurse, sowie Rohstoffpreise.

Value-at-Risk hat verschiedene Funktionen. Es ist ein Instrument des Risikomanagements. Das Ziel des Risikomanagements ist die Vermeidung oder Reduktion der Gefahr von dramatischen Verlusten sowie die Kontrolle sämtlicher Aktivitäten, die durch bewusstes Eingehen von Risiken entsprechende Gewinne erzielen sollen. Value-at-Risk kann für das gesamte Unternehmen und/oder einzelne Bereiche angegeben werden (Informationsfunktion) und kann zur Vorgabe von Limits für Händler oder Geschäftsbereiche dienen (Steuerungsfunktion). Dies kann verhindern, dass unkontrolliert Positionen mit hohem Risiko aufgebaut werden.

Value-at-Risk kann auch zur Performancemessung dienen, da die Erträge verschiedener Händler, auf verschiedenen Märkten etc. vergleichbar gemacht werden können. Mit Value-at-Risk kann der relative – auf das Risiko bezogene – Erfolg ermittelt werden, so dass eine zusätzliche Möglichkeit zu bereits bekannten Methoden der Performancemessung besteht.

Aufsichtsrechtliche Normen (Basel II, BWG, etc.) sehen die Verwendung des Value-at-Risk als eine mögliche Grundlage für die Ermittlung der Eigenkapitalunterlegung vor. Hier kommt der Wunsch nach Risikobegrenzung aus volkswirtschaftlicher Sicht zum Ausdruck (Regulierungsfunktion).

5.1 Definition und Interpretation

Der Value-at-Risk VaR(α) für ein **Konfidenzniveau** α ist jener erwartete Vermögensverlust, der mit einer Wahrscheinlichkeit von α überschritten wird:

$$\mathrm{P}[(W_{t+1} - W_t) \leq -\mathrm{VaR}(\alpha)] = \alpha.$$

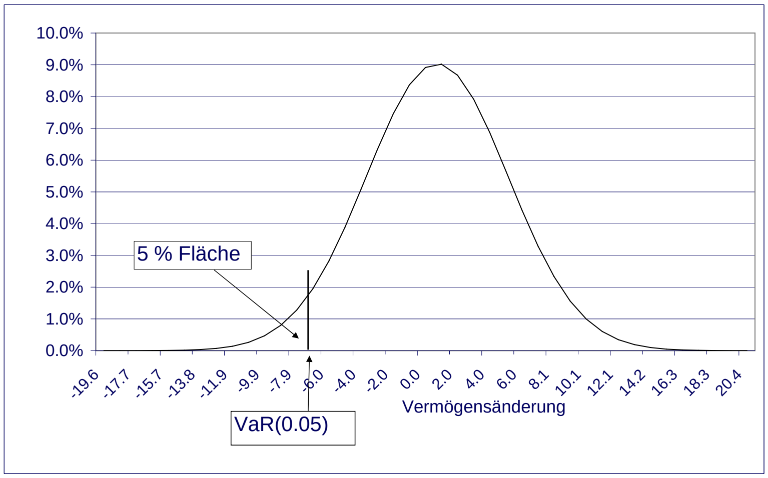
$$\int_{-\infty}^{-\mathrm{VaR}(\alpha)} f(x)\,dx = \alpha \qquad x = \Delta W.$$

W_t bezeichnet den Marktwert einer Vermögensposition zum Zeitpunkt t und $f(x)$ die Dichtefunktion der Vermögensänderung. $-$VaR(α) ist daher das α-Quantil der Verteilung der Vermögensänderung. Zur Illustration ist in Abbildung 12 die Dichtefunktion für die Wertänderung einer Vermögensposition dargestellt. Die vertikale Linie kennzeichnet den VaR(0.05) – jenen Verlust, der mit 5% Wahrscheinlichkeit überschritten wird.

Üblicherweise wird VaR so definiert, dass eine positive Zahl resultiert. Da das Quantil der Vermögensänderungen für kleine Werte von α im allgemeinen *negativ* ist, wird bei der Definition des VaR ein Minuszeichen vorangestellt.

Um einen konkreten Wert für VaR zu finden, müssen die statistischen Eigenschaften der Renditen der betrachteten Vermögensposition berücksichtigt werden. Dies kann entweder auf Basis der Annahme einer Normalverteilung mit Hilfe von Erwartungswert und Varianz

Abb.12: Dichtefunktion für Vermögensänderungen und VaR bei 5%.



oder auf Basis empirischer Quantile erfolgen. Die erste Variante wird als **analytisches Modell** bezeichnet und wird im nächsten Kapitel erläutert. Die zweite Variante erfolgt auf Basis von Simulationen, die entweder auf historischen Daten oder auf Zufallszahlen beruhen (siehe Kapitel 5.6).

5.2 Analytisches Modell

Das analytische Modell beruht auf der Annahme einer Normalverteilung der Renditen. Eine weitere häufig verwendete Bezeichnung ist **Varianz-Kovarianz-Analyse**. Aufgrund der Definition

$$Y_{t+1} = \ln W_{t+1} - \ln W_t$$

für die stetige Rendite einer Vermögensposition, kann die Vermögensänderung wie folgt angeschrieben werden:

$$W_{t+1} - W_t = W_t(\exp\{Y_{t+1}\} - 1).$$

Wenn man annimmt, dass $Y_t \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ dann kann man die Quantile der standardisierten Normalverteilung z_α zur Berechnung von Quantilen der Renditen verwenden:

$$Q(\alpha) = \mu + \sigma z_\alpha \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}[Y_t \leq Q(\alpha)] = \alpha.$$

Diese Aussagen über Y_t können verwendet werden, um Aussagen über Quantile der Vermögensänderungen zu machen. Im analytischen Modell erfolgt die Berechnung des VaR bei einem Niveau von α mit

$$\mathrm{VaR}(\alpha) = -W_t[\exp\{\mu + 0.5\sigma^2 + \sigma z_\alpha\} - 1] = -W_t[\exp\{Q(\alpha)\} - 1]. \tag{14}$$

Der Term $0.5\sigma^2$ im Exponenten beruht auf den Eigenschaften der Lognormalverteilung. X=exp$\{Y\}$ ist lognormal verteilt, wenn Y=ln X normalverteilt ist. Wenn $Y \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ dann beträgt der Erwartungswert von X $\exp\{\mu + \sigma^2/2\}$.

Wenn μ und σ Erwartungswert und Standardabweichung von täglichen Renditen sind, dann ist VaR(α) der erwartete Vermögensverlust für den nächsten Tag auf Basis des aktuellen Vermögens W_t, der mit einer Wahrscheinlichkeit von α überschritten wird.

Beispiel 25: Aus täglichen Renditen des DAX erhält man μ=0.000464, σ=0.00881. Für ein aktuelles Vermögen von 500 GE erhält man

$$\text{VaR}(0.01) = -500[\exp\{0.000464 + 0.00881^2/2 + 0.00881 \cdot (-2.326)\} - 1] = 9.90,$$

$$\text{VaR}(0.05) = -500[\exp\{0.000464 + 0.00881^2/2 + 0.00881 \cdot (-1.645)\} - 1] = 6.95.$$

Es ist daher über einen Zeitraum von einem Tag mit 1% Wahrscheinlichkeit ein Verlust von 9.9 GE oder mehr zu erwarten. Wenn man mit relativen Häufigkeiten argumentiert und 250 Handelstage pro Jahr unterstellt, dann sind gemäß VaR(0.01) an 2–3 Tagen (250·0.01=2.5 Tage) eines Jahres Verluste von mehr als 9.9 GE zu erwarten.

RiskMetrics™[13] hat die Entwicklung der VaR-Berechnung stark geprägt. Im Ansatz von RiskMetrics™ werden diskrete Renditen angenommen. Außerdem wird μ=0 gesetzt[15] und der VaR wird mit folgender Approximation von Gleichung (14) berechnet:

$$\text{VaR}^{\text{RM}}(\alpha) = -W_t Q(\alpha) = -W_t \sigma z_\alpha. \tag{15}$$

Beispiel 26: Unter Verwendung der Vereinfachung von RiskMetrics™ für ein Vermögen von 500 GE erhält man

$$\text{VaR}^{\text{RM}}(0.01) = -500 \cdot 0.00881 \cdot (-2.326) = 10.25,$$

$$\text{VaR}^{\text{RM}}(0.05) = -500 \cdot 0.00881 \cdot (-1.645) = 7.25.$$

D.h. auf Basis der RiskMetrics™ Approximation ist innerhalb des nächsten Tages mit 1% Wahrscheinlichkeit ein Verlust von mindestens 10.25 GE zu erwarten. Der Unterschied zum VaR von 9.9 GE aus Beispiel 25 beruht u.a. darauf, dass der Mittelwert gleich null gesetzt wird. Dadurch verschiebt sich der VaR in Abbildung 12 nach *links* und der erwartete Verlust wird *überschätzt*[16].

5.3 Conditional VaR

Als Ergänzung zum VaR kann der **conditional VaR** (abgekürzt: **cVaR**; auch als erwarteter *shortfall* oder *tail loss* bezeichnet) verwendet werden. cVaR ist der *durchschnittliche* Verlust, der bei Überschreitung des VaR eintritt. Mit dieser Kennzahl will man eine bessere Abschätzung des Risikos erreichen, weil man auch Informationen über das *Ausmaß* des Verlusts erhält, der über VaR hinausgeht.

Zur Berechnung des cVaR betrachten wir zunächst die standardisierte Normalverteilung. Die Dichtefunktion für diesen Spezialfall der Normalverteilung (mit μ=0 und σ=1) lautet

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-0.5x^2\right\}.$$

[15] Nach dem Ansatz von RiskMetrics™ wird μ=0 nicht nur bei der VaR-Berechnung, sondern auch bei der Schätzung von σ angenommen.

[16] Wenn der Mittelwert *negativ* ist, dann verschiebt sich der VaR nach *rechts* und der Verlust wird *unterschätzt*.

Mit Hilfe dieser Dichte kann der Erwartungswert der standardisierten Normalverteilung für Werte kleiner dem Quantil z_α berechnet werden. Der resultierende Wert – als *conditional*-Quantil bezeichnet – entspricht dem cVaR für eine standardisiert, normalverteilte Zufallsgröße:

$$\bar{z}_\alpha = -\frac{\varphi[z_\alpha]}{\alpha}.$$

Die folgende Tabelle enthält das α-Quantil z_α, die Dichte $\varphi[z_\alpha]$ und das *conditional*-Quantil $\bar{z}_\alpha$ für verschiedene Werte von α. Man erkennt, dass das Verhältnis aus $\bar{z}_\alpha$ und z_α umso größer ist, je größer α gewählt wird.

	α-Quantil	Dichte std.NV	cond.Quantil	Verhältnis
α	z_α	$\varphi[z_\alpha]$	$-\varphi[z_\alpha]/\alpha$	
0.01	-2.326	0.027	-2.665	1.146
0.05	-1.645	0.103	-2.063	1.254
0.10	-1.282	0.175	-1.755	1.369

Das Verhältnis aus $\bar{z}_\alpha$ und z_α kann dazu verwendet werden, um cVaR aus VaR zu berechnen. In Beispiel 25 wurde VaR(0.05)=6.95 für ein aktuelles Vermögen von 500 GE ermittelt. Der entsprechende cVaR(0.05) beträgt

$$\text{cVaR}(0.05) = \text{VaR}(0.05) \cdot 1.254 = 6.95 \cdot 1.254 = 8.71.$$

Der durchschnittliche Verlust, der über 6.95 GE hinausgeht und innerhalb eines Tages mit 5% Wahrscheinlichkeit eintreten kann, beträgt daher 8.71 GE.

5.4 Alternative Verteilungen

Zahlreiche empirische Studien zeigen, dass die Renditen von Aktien und Wechselkursen nicht normalverteilt sind, sondern so genannte *fat tails* aufweisen (siehe Kapitel 1.2). Um diesen Umstand zu berücksichtigen müssen Quantile einer geeigneten Verteilungsfunktion verwendet werden, die extremen Renditen eine größere Wahrscheinlichkeit als die Normalverteilung zuordnen. Eine von mehreren Möglichkeiten ist die Verwendung der **Student *t*-Verteilung**, die einen Mittelwert von null hat und deren Form durch einen Parameter ν (Freiheitsgrad) beschreiben wird. Der Wert von ν kann auf Basis der Kurtosis U>3 wie folgt bestimmt werden:

$$\nu = \frac{6}{U-3} + 4.$$

Anhand der Quantile der t-Verteilung $T(\alpha, \nu)$ kann man den VaR analog zur Berechnung auf Basis der Normalverteilung ermitteln:

$$\text{VaR}(\alpha) = -W_t[\exp\{\mu + \sigma^2/2 + \sigma T(\alpha, \nu)\} - 1].$$

Je kleiner der Wert von ν gewählt wird, desto stärker weicht die t-Verteilung von der Normalverteilung ab. Für Werte von ν>120 kann man die t-Verteilung kaum von der Standardnormalverteilung unterscheiden.

Beispiel 27: Unter Verwendung der t-Verteilung mit ν=7.01 (geschätzt aus der Kurtosis 4.99) erhält man

$$\text{VaR}(0.01) = -500[\exp\{0.000464 + 0.00881^2/2 + 0.00881 \cdot (-2.998)\} - 1] = 12.79,$$

$$\text{VaR}(0.05) = -500[\exp\{0.000464 + 0.00881^2/2 + 0.00881 \cdot (-1.895)\} - 1] = 8.03.$$

Beide Werte weichen deutlich von den Werten ab, die in Beispiel 25 unter der Annahme der Normalverteilung ermittelt wurden.

Eine zweite Möglichkeit zur Berücksichtigung von fat tails besteht darin, eine **Mischung aus Normalverteilungen** mit unterschiedlicher Varianz im Rahmen einer Monte-Carlo Simulation zu erzeugen. Dazu werden zunächst Renditen für jede Normalverteilung simuliert, wobei meist zwei bis vier Verteilungen verwendet werden. Anschließend werden – in Abhängigkeit von vorweg festgelegten Wahrscheinlichkeiten – Renditen aus jeweils einer dieser Verteilungen zufällig gezogen. Die Kurtosis der resultierenden Renditen ist bei Verwendung geeigneter Varianzen und Wahrscheinlichkeiten für die Wahl einer der Verteilungen größer als drei. Die Dichtefunktion einer Mischverteilung kann nicht in geschlossener Form angeschrieben werden. Der VaR kann jedoch aus den empirischen Quantilen der simulierten Renditen ermittelt werden (siehe Kapitel 5.6).

Eine dritte Möglichkeit berücksichtigt sowohl Schiefe als auch Kurtosis. Unter Verwendung der **Cornish-Fisher Expansion** wird das Quantil der Standardnormalverteilung wie folgt korrigiert:

$$z_{\alpha,cf} = z_\alpha + \frac{(z_\alpha^2 - 1)S}{6} + \frac{(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)U}{24} - \frac{(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)S^2}{36}.$$

Beispiel 28: Unter Verwendung Cornish-Fisher Expansion erhält man:

$$\text{VaR}_{cf}(0.01) = -500[\exp\{0.000464 + 0.00881^2/2 + 0.00881 \cdot (-2.945)\} - 1] = 12.56,$$

$$\text{VaR}_{cf}(0.05) = -500[\exp\{0.000464 + 0.00881^2/2 + 0.00881 \cdot (-1.670)\} - 1] = 7.06.$$

Man erkennt, dass die Korrektur auf Basis Cornish-Fisher Expansion weniger stark wirkt, als die Verwendung der t-Verteilung. Für $\alpha = 0.05$ besteht kaum ein Unterschied zur Verwendung der Normalverteilung.

Aufgabe 10: Erheben Sie (tägliche oder wöchentliche) Daten für eine einzelne Aktie von `finance.yahoo.com` oder einer anderen Quelle. Ermitteln Sie den VaR für α=0.01 und 0.05 für ein aktuelles Vermögen von 300 GE unter Verwendung der Normalverteilung, der t-Verteilung und der Cornish-Fisher Expansion.

5.5 VaR über mehrere Perioden

Die VaR-Berechnung erfolgt üblicherweise auf Basis von täglichen Renditen. Aufgrund aufsichtsrechtlicher Normen oder anderer Überlegungen kann es notwendig oder sinnvoll sein den VaR für eine längere Halteperiode als einen Tag zu ermitteln. Für diesen Zweck gibt es mehrere Berechnungsmöglichkeiten. Hier werden drei Varianten dargestellt.

1. Skalierung von Erwartungswert und Varianz: wenn stetige Renditen betrachtet werden, die unkorreliert sind und konstante Varianz haben, dann ist der Erwartungswert von Renditen über H Tage ist gleich dem H-fachen täglichen Erwartungswert:

$$\mu_H = H\mu.$$

Die Varianz von Renditen über H Tage ist gleich der H-fachen täglichen Varianz:

$$\sigma_H^2 = H\sigma^2.$$

Allgemein gilt für den VaR über H Tage

$$\text{VaR}(\alpha)_H = -W_t[\exp\{H\mu + 0.5H\sigma^2 + \sqrt{H}\sigma z_\alpha\} - 1],$$

wobei μ und σ Erwartungswert und Standardabweichung für tägliche Renditen sind.

Wenn die täglichen Renditen autokorreliert sind, dann kann die Varianz nicht mit dem Faktor H skaliert werden. Für die Varianz über zwei Perioden gilt z.B.

$$2\sigma^2[1 + \rho_1],$$

über drei Perioden gilt

$$3\sigma^2 \left[1 + 2\left(\frac{2}{3}\rho_1 + \frac{1}{3}\rho_2\right)\right],$$

wobei ρ_k die Autokorrelation zum Lag k bezeichnet. Für H Perioden gilt allgemein:

$$H\sigma^2 \left[1 + 2\sum_{i=1}^{H-1} \frac{H-i}{H}\rho_i\right].$$

Die Varianz wächst daher nicht mit H, sondern ist – je nach Vorzeichen und Ausmaß der Autokorrelation – größer oder kleiner als $H\sigma^2$.

Es gibt zahlreiche empirische Untersuchungen, die zeigen, dass die Varianz von täglichen Renditen nicht konstant ist. Dies hat zwei Konsequenzen für die Skalierung: 1. (kumulierte) Renditen über H Tage sind *nicht* normalverteilt. Wie schon in Kapitel 5.4 besteht auch hier die Möglichkeit die Quantile der t-Verteilung zu verwenden. 2. es werden Prognosen der (zeitabhängigen) Varianz benötigt. Für diesen Zweck sind geeignete Modelle der Zeitreihenanalyse erforderlich, für deren Darstellung wir auf RiskMetrics™[13], S.77f verweisen.

Beispiel 29: Für μ=0.000464, σ=0.0088 und H=5 erhält man μ_5=5·0.000464=0.00232, $\sigma_5=\sqrt{5}\cdot 0.0088$=0.0197 und:

$$\text{VaR}(0.01)_5 = -500[\exp\{0.00232 + 0.0197^2/2 + 0.0197\cdot(-2.326)\} - 1] = 21.3.$$

D.h. innerhalb der nächsten fünf Tage ist mit 1% Wahrscheinlichkeit ein Verlust von 21.3 GE oder mehr zu erwarten.

2. Skalierung des VaR: die hier verwendete Berechnung beruht darauf, dass VaR als eine in Geldeinheiten ausgedrückte Standardabweichung aufgefasst werden kann:

$$\text{VaR}(\alpha)_H = \sqrt{H}\cdot\text{VaR}(\alpha)$$

Beispiel 30: Auf Basis des täglichen Wertes VaR(0.01)=9.9 aus Beispiel 25 erhält man für H=5

$$\mathrm{VaR}(0.01)_5 = \sqrt{5} \cdot 9.9 = 22.2.$$

Dieser Wert weicht nur wenig vom Wert 21.3 ab, der in Beispiel 29 ermittelt wurde. Allerdings kann die Diskrepanz zwischen diesen beiden Ansätzen mit H stark zunehmen, vor allem wenn α klein ist.

3. Mehrperiodige Renditen: hier erfolgt die VaR-Berechnung auf Basis von Mittelwert und Standardabweichung mehrperiodiger (überlappender) Renditen:

$$Y_t(H) = \ln W_t - \ln W_{t-H}.$$

Beispiel 31: Aus den 5-Tages Renditen des DAX erhält man die Schätzwerte μ=0.00222 und σ=0.02. Der daraus berechnete Var(0.01) beträgt (μ und σ müssen nicht mehr skaliert werden!):

$$\mathrm{VaR}(0.01)_5 = -500[\exp\{0.00222 + 0.02^2/2 + 0.02 \cdot (-2.326)\} - 1] = 21.6.$$

Für einen Vergleich verschiedener Ansätze zur Berechnung des VaR über mehrere Perioden siehe Geyer/Pichler[4].

Aufgabe 11: Verwenden Sie die Daten aus Aufgabe 10. Ermitteln Sie den VaR für Haltedauern von H=2 und H=5 unter Verwendung von allen drei Berechnungsvarianten.

5.6 Historische und Monte-Carlo Simulation

Im analytischen Modell wird eine (multivariate) Normalverteilung für die Renditen unterstellt und der VaR auf Basis von Erwartungswert, Varianz und Korrelation berechnet. Die Definition des VaR ermöglicht jedoch auch eine VaR-Berechnung auf Basis der empirischen Quantile der historischen – d.h. beobachteten – Verteilung von Renditen. Diese Form der VaR-Berechnung kann vor allem dann eingesetzt werden, wenn die Renditen nicht normalverteilt sind. Sowohl schiefe Verteilungen als auch Leptokurtosis können auf diese Weise berücksichtigt werden.

Bei der **historischen Simulation** wird das empirische α-Quantil aus einer Stichprobe von Renditen $Y_1, \ldots, Y_n$ berechnet und in der allgemeinen VaR Definition verwendet:

$$\mathrm{VaR}(\alpha) = -W_t[\exp\{Q_{\mathrm{emp}}(\alpha)\} - 1].$$

Beispiel 32: Wenn man die empirischen Quantile täglicher Renditen des DAX verwendet, erhält man folgende VaR-Werte für ein aktuelles Vermögen von 500 GE:

$$\mathrm{VaR}(0.01) = 11.74 \qquad \mathrm{VaR}(0.05) = 6.76.$$

Mit dem analytischen Modell wurden die Werte 9.90 und 6.95 ermittelt. Vor allem für den VaR(0.01) resultiert ein beträchtlicher Unterschied. Dies beruht auf dem Umstand, dass die Schiefe −0.23 und die Kurtosis 4.99 betragen. Die empirische Verteilung der DAX Renditen kann daher vor allem am linken Rand nicht sehr gut durch eine Normalverteilung approximiert werden.

cVaR kann auch Basis einer historischen Simulation ermittelt werden. Dazu wird einfach der Durchschnitt jener Vermögenswerte gebildet, die kleiner als VaR(α) sind. Im vorliegenden Beispiel erhält man cVaR(0.01)=15.14 und cVaR(0.05)=9.97.

Tab.4: Standardfehler für Quantile.

	empirisch		normal	
n	α=0.01	α=0.05	α=0.01	α=0.05
100	0.373	0.211	0.193	0.153
200	0.264	0.149	0.136	0.108
500	0.167	0.095	0.086	0.069
1000	0.118	0.067	0.061	0.049

Aufgabe 12: Verwenden Sie die Daten aus Aufgabe 10 und ermitteln Sie den VaR für Haltedauern von H=1, H=2 und H=5 auf Basis einer historischen Simulation.

Ein Nachteil der VaR-Berechnung auf Basis einer historischen Simulation ist die geringere (statistische) Genauigkeit, die mit der empirischen Quantilschätzung verbunden ist. Der Standardfehler für das empirische Quantil $Q_{\text{emp}}(\alpha)$ beträgt

$$\text{s.e.}[Q_{\text{emp}}(\alpha)] = \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{nf(Q)^2}},$$

wobei n die Größe der Stichprobe und $f(Q)$ der Wert der Dichte der Standardnormalverteilung beim Wert des tatsächlichen Quantils ist. Im Vergleich dazu beträgt der Standardfehler auf Basis der Normalverteilung

$$\text{s.e.}[Q_{\text{normal}}(\alpha)] = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}(1+0.5z_\alpha^2)}.$$

Tab.4 erlaubt einen Vergleich der Standardfehler für verschiedene Werte von α und n. Man erkennt, dass die Standardfehler empirischer Quantile für α=0.01 etwa doppelt so groß sind, wie jene unter der Annahme einer Normalverteilung. Die Genauigkeit des analytischen Modells ist jedoch nur dann größer, wenn eine Normalverteilung auch tatsächlich vorliegt. Dieser Nachteil wird daher durch den Vorteil kompensiert, dass die empirischen Eigenschaften von Renditen, die häufig nicht den Standardannahmen entsprechen, exakt repliziert werden können. Um die empirischen Eigenschaften der Renditen möglichst gut abzubilden und die Genauigkeit der Quantilschätzung zu erhöhen, sollten *möglichst viele*[17] historische Renditen verwendet werden.

Die VaR Berechung auf Basis einer **Monte Carlo Simulation** erfolgt dann, wenn die analytische Berechnung des VaR nicht oder schwer möglich ist. Bei der Simulation wird eine ausreichend große Anzahl von Renditen erzeugt, die bestimmte, vorgegebene statistische Eigenschaften (Mittelwert, Varianz, Korrelation, etc.) haben. Diese entsprechen meist den empirischen Eigenschaften der Renditen, können aber auch gezielt davon abweichen.

Beispiel 33: Quantile aus einer Mischung von Normalverteilungen können nicht analytisch bestimmt werden. Man kann jedoch Renditen einer Mischverteilung simulieren (siehe Kapitel 5.4). Bei Verwendung der Standardabweichungen (Auswahlwahrscheinlichkeiten) 0.01762 (0.05), 0.00969 (0.35) und 0.00705 (0.6) und dem Mittelwert 0.000464 (in allen drei Fällen) erhält man eine Kurtosis der simulierten Mischverteilung von ca. 4.5. Die resultierenden VaR(0.01) Werte sind typischerweise größer als die VaR(0.01) Werte aus dem analytischen Modell. Bei α=0.05 sind die Werte aus der simulierten Mischverteilung kleiner.

[17] Das Verhältnis aus beiden Standardfehlern ist unabhängig von n. Daher kann nur die absolute, nicht jedoch die relative Genauigkeit durch Vergrößerung der Stichprobe verbessert werden.

5.7 Backtesting

Die Berechnung des VaR ergibt einen erwarteten Verlust, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überschritten wird. Wenn die VaR-Berechung in regelmäßigen Abständen (meist täglich) erfolgt, erhält man eine Zeitreihe von VaR-Werten, die Gegenstand einer Überprüfung des verwendeten Modells sein kann. Dieser Überprüfung wird als **Backtesting** bezeichnet. Es werden vorhandene historische Daten verwendet und der VaR für $t{+}1$ stets auf Basis von Renditen bis zum Zeitpunkt t berechnet. Dazu wird die Zeitreihe der *tatsächlich realisierten* Vermögensänderungen mit der Zeitreihe der VaR-Werte verglichen. Man kann dabei anhand der Anzahl der so genannten **Ausnahmen** feststellen, wie oft der berechnete VaR tatsächlich überschritten[18] wurde. In einem adäquaten Modell sollte die relative Häufigkeit der Ausnahmen dem vorgegebenen Konfidenzniveau entsprechen.

Für die Modellbeurteilung ist nicht nur relevant, *wie viele* Ausnahmen auftreten, sondern auch die zeitliche Abfolge der Ausnahmen. Eine Häufung von Ausnahmen innerhalb eines bestimmten Zeitraums kann darauf hindeuten, dass das Modell nicht oder nicht mehr geeignet ist und revidiert werden sollte. Zu diesem Zweck kann eine graphische Darstellung der *kumulierten* Anzahl der Ausnahmen verwendet werden, die mit dem Verlauf verglichen wird, der für ein adäquates Modell erwartet wird.

Für den praktischen Einsatz von VaR Modellen und das Backtesting ist es im analytischen Modell notwendig, tägliche Schätzwerte für Mittelwert und Standardabweichung zu ermitteln. Ein häufig verwendeter Ansatz zur Parameterschätzung, der z.B. auch von RiskMetrics™ verwendet wird, beruht auf einem exponentiell gewichteten gleitenden Durchschnitt (*exponentially weighted moving average* – **EWMA**). Dabei wird der Mittelwert für den Zeitpunkt $t{+}1$ aus

$$\mu_{t+1} = l\mu_t + (1 - l)Y_t$$

geschätzt, wobei l ein Gewichtungsfaktor ist, der üblicherweise zwischen 0.9 und 0.99 liegt. Dieser Ansatz impliziert, dass alle vergangenen Renditen mit exponentiell abfallender Gewichtung in die Berechnung eingehen. Je größer l gewählt wird, umso glatter verläuft der Erwartungswert.

Analog wird die Varianz für den Zeitpunkt $t{+}1$ aus

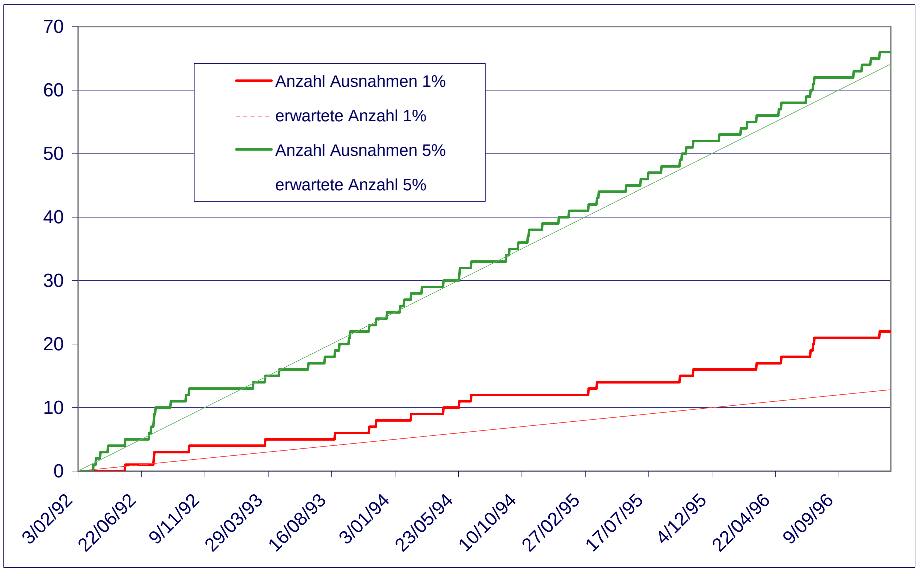
$$\sigma^2_{t+1} = l\sigma^2_t + (1 - l)(Y_t - \mu_t)^2$$

geschätzt. Modelle der Zeitreihenanalyse (ARMA- und GARCH-Modelle) zur Schätzung von Mittelwert und Varianz werden in diesem Text nicht dargestellt und wir verweisen auf Brooks[2], S.228f und S.437f.

> **Beispiel 34:** In Abb.13 sind kumulierte und erwartete Ausnahmen für VaR(0.01) und VaR(0.05) aus dem analytischen Modell für täglichen Wertänderungen des DAX (W_0=500) dargestellt. Mittelwert und Varianz werden mit EWMA und λ=0.95 geschätzt, wobei für den VaR im Zeitpunkt t nur beobachtete Renditen bis t–1 verwendet werden. Man erkennt, dass das Modell für den VaR(0.01) ungeeignet ist: die kumulierten Ausnahmen wachsen während des gesamten Zeitraums stärker als erwartet. Der VaR(0.01) wird in 1.7% der Fälle überschritten. Das analytische Modell *unterschätzt* daher den VaR. Dies kann damit erklärt werden, dass die tatsächlichen

[18] Der VaR wird als *positive* Zahl angegeben. Für das Backtesting und Vergleiche mit Vermögensänderungen muss –VaR verwendet werden. Es sollte daher auch exakt der Begriff 'unterschreiten' verwendet werden.

Abb.13: Kumulierte und erwartete Ausnahmen für tägliche Wertänderungen des DAX.



> Vermögensänderungen und Renditen nicht normalverteilt sind, oder dass die Schätzwerte für Mittelwert und Standardabweichung nicht optimal sind. Für VaR(0.05) ist der Prozentsatz der Ausnahmen annähernd korrekt (5.1%). Wird anstelle der Normalverteilung die t-Verteilung mit 10 Freiheitsgraden verwendet, erhält man 1.0% bzw. 4.1% Ausnahmen.

Beim Backtesting oder bei der laufenden Kontrolle eines VaR-Modells muss man stets bedenken, dass hier ein statistisches Testproblem vorliegt. D.h. für jede – positive oder negative – Schlussfolgerung über die Eignung eines Modells besteht eine Irrtumswahrscheinlichkeit. Dabei ist zu beachten, dass die Fähigkeit zur Aufdeckung von systematischen Modellfehlern vom Konfidenzniveau und von der Anzahl der überprüften Fälle abhängt. Allgemein gilt, dass es für kleine Konfidenzniveaus sehr schwierig ist, Modellfehler aufzudecken. Die Präzision der Schlussfolgerungen nimmt jedoch mit der Anzahl der Fälle zu. Gegen die Verwendung von großen Niveaus (z.B. 10% oder 25%) spricht, dass dabei die eigentliche Zielsetzung von VaR – die Messung des Risikos außergewöhnlich großer Verluste – nicht beachtet wird.

> **Aufgabe 13:** Verwenden Sie die Daten aus Aufgabe 10 und führen Sie ein Backtesting mit EWMA unter Verwendung von Normal- und t-Verteilung durch. Vergleichen Sie die Entwicklung der Ausnahmen für verschiedene Werte von λ und ν.

5.8 VaR bei mehr als einer Risikoquelle

5.8.1 VaR eines Portfolios

Bis jetzt beruhte die VaR-Berechnung auf der Annahme, dass nur eine Risikoquelle vorliegt. Wenn allerdings zwei (oder mehr) Ursachen für unerwartete Änderungen einer Vermögensposition bestehen, dann muss der – aus der Portfoliotheorie bekannte – Diversifikationseffekt beachtet werden.

Auf Basis der Quantile der (stetigen) Renditen eines Portfolios Q_p kann man den VaR eines Portfolios mit Hilfe der allgemeinen Formel $-W_t[\exp\{Q_p\}-1]$ berechnen. Die Quantile können aus einem analytischen Modell oder aus Simulationen bestimmt werden. Im analytischen Modell ist allerdings zu beachten, dass die aus der Portfoliotheorie bekannten Formeln für Erwartungswert und Varianz

$$\mu_p = \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{x} \qquad \text{und} \qquad \sigma_p^2 = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}$$

nur dann gelten, wenn diskrete Renditen verwendet werden (siehe (2) und (3) auf S.1). Außerdem muss eine multivariate Normalverteilung der Renditen vorliegen. Im Kontext von Portfolios oder mehreren Risikoquellen werden daher üblicherweise diskrete Renditen angenommen. Im Ansatz von RiskMetrics™ wird außerdem der Mittelwert gleich null gesetzt. Unter diesen Annahmen wird der VaR eines Portfolios aus *zwei* Vermögenspositionen wie folgt berechnet:

$$\text{VaR}(\alpha) = \sqrt{[\text{VaR}_1(\alpha)]^2 + [\text{VaR}_2(\alpha)]^2 + 2\rho_{12}\text{VaR}_1(\alpha)\text{VaR}_2(\alpha)}. \tag{16}$$

$\text{VaR}_1(\alpha)$ und $\text{VaR}_2(\alpha)$ sind VaR-Werte der beiden Risikoquellen und ρ_{12} ist die Korrelation zwischen den (diskreten) Renditen der beiden Wertpapiere. Diese Formel beruht auf folgender Herleitung (siehe Gleichung (15) auf S.49):

$$\text{VaR}(\alpha) = -W(\mu_p + \sigma_p z_\alpha).$$

W_p=W_1+W_2 ist die Summe der aktuellen Vermögenswerte der beiden Risikoquellen. Nun wird μ_p=0 gesetzt und für σ_p eingesetzt (x_1=W_1/W_p und x_2=W_2/W_p):

$$\text{VaR}(\alpha) = W_p|z_\alpha|\sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho}$$

$$\text{VaR}(\alpha) = \sqrt{W_p^2x_1^2\sigma_1^2z_\alpha^2 + W_p^2x_2^2\sigma_2^2z_\alpha^2 + 2\rho W_p x_1\sigma_1 z_\alpha x_2\sigma_2 z_\alpha}.$$

Aufgrund von $W_p^2x_1^2\sigma_1^2z_\alpha^2$=$W_1^2\sigma_1^2z_\alpha^2$=$[\text{VaR}_1(\alpha)]^2$ (und analog $\text{VaR}_2(\alpha)$) erhält man Gleichung (16).

Die VaR-Berechnung bei *mehreren* Risikoquellen, die additiv in einem Portfolio verknüpft sind, erfolgt üblicherweise auf Basis der RiskMetrics™ Approximation. Dieser Umstand wird in der Folge nicht mehr ausdrücklich gekennzeichnet. Die Vorgangsweise kann wie folgt zusammengefasst werden:

1. VaR-Berechnung jeder einzelnen von n Positionen (mit VaR_i bezeichnet). Dabei dürfen nur VaRs für dasselbe Niveau α und dieselbe Halteperiode verwendet werden.

2. VaR-Berechnung des Portfolios mit Hilfe von

   $$\text{VaR} = \sqrt{\boldsymbol{V}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{V}} \qquad \boldsymbol{V} = [\text{VaR}_1 \quad \text{VaR}_2 \quad \ldots \quad \text{VaR}_n]',$$

   wobei $\boldsymbol{C}$ die Korrelationsmatrix zwischen den Renditen der einzelnen Positionen ist.

Beispiel 35: Wir betrachten drei Wertpapiere mit aktuellen Marktwerten W_1=250, W_2=3000 und W_3=60 unter Verwendung der Angaben aus Beispiel 9 auf S.18. Die dort verwendeten p.a. Werte werden auf tägliche Werte skaliert. Die VaR(0.01)-Werte der einzelnen Positionen betragen: 3.7, 53.0 und 1.3 (nach RiskMetrics™). Aus $\sqrt{\boldsymbol{V}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{V}}$ erhält man Var(0.01)=52.0. Auf Basis der Renditen des Portfolios (ohne RiskMetrics™ Approximation) erhält man μ_p=0.0002, σ_p=0.0068 und VaR(0.01)=50.9.

> **Aufgabe 14:** Verwenden Sie die Daten für drei Aktien aus Aufgabe 1 bzw. 6. Nehmen Sie an, dass Sie je zehn Stück der drei Aktien in einem Portfolio halten und berechnen Sie den $\text{VaR}^{\text{RM}}(0.01)$ für das Portfolio.

Wenn eine Position nicht long, sondern short gehalten wird, dann kehrt sich das Vorzeichen der Korrelationen der Short-Position mit den Long-Positionen um. Dies betrifft alle Werte der Zeile und Spalte in $\boldsymbol{C}$, die der Short-Position entsprechen. Eine äquivalente Möglichkeit zur Berücksichtigung von Short- und Long-Positionen besteht darin, den VaRs von Short-Positionen im Vektor $\boldsymbol{V}$ ein negatives Vorzeichen zu geben. In diesem Fall werden keine Vorzeichen in der Matrix $\boldsymbol{C}$ verändert.

5.8.2 VaR auf Basis von Risikofaktoren

Bei der VaR-Berechnung für sehr große Portfolios (bestehend aus sehr vielen Wertpapieren) ist es üblich, dass das Risiko der einzelnen Position in Abhängigkeit von *relativ wenigen* Risikofaktoren dargestellt wird. Der Risikofaktor 'Wechselkurs' wirkt z.B. auf sämtliche Fremdwährungspositionen; der Risikofaktor 'Aktienindex' wirkt auf die einzelnen Titel im Index (siehe Kapitel 3.5); die Barwerte zukünftiger Ein- oder Auszahlungen werden durch einen dem Zeitpunkt der Fälligkeit entsprechenden Faktor 'Zinssatz' bestimmt. Vermögenspositionen können auch von mehreren Risikofaktoren abhängen (z.B. eine Aktienposition im Ausland hängt von Wechselkurs und Aktienindex ab). Diese Zuordnung von Vermögenswerten zu Risikofaktoren wird auch als **Product Mapping** bezeichnet.

Portfolio aus n Aktien

Wir betrachten zunächst ein Portfolio aus n Aktien. Die Wertänderung des Portfolios zwischen t und t+1 kann wie folgt angeschrieben werden:

$$\Delta W_p = W_1 R_1 + \cdots + W_n R_n,$$

wobei W_i die aktuellen Marktwerte der Aktien in t sind und R_i die diskreten Renditen zwischen t und $t+1$. Nun wird der Marktindex als Risikofaktor der einzelnen Aktien berücksichtigt (wobei üblicherweise der konstante Term im Marktmodell (11) ignoriert wird):

$$\Delta W_p = W_1\beta_1 R_m + \cdots + W_n\beta_n R_m = \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i W_i\right) R_m = \delta_m R_m. \tag{17}$$

δ_m wird als **Delta-Äquivalent** bezeichnet. Es entspricht der gesamten Wertänderung des Portfolios, wenn die Rendite des Risikofaktors 'Aktienmarkt' 1.0 (100%) beträgt. Der VaR für das Aktienportfolio kann daher auf Basis des Delta-Äquivalents und der Quantile der Marktrendite bestimmt werden:

$$\text{VaR}(\alpha) = -\delta_m \sigma_m z_\alpha.$$

Die Korrelation zwischen den einzelnen Aktien wird daher durch die Beta-Faktoren und die Marktrendite substituiert. Durch diese Betrachtungsweise kann eine beträchtliche Reduktion der benötigten statistischen Kennzahlen erreicht werden. Anstelle von n Varianzen und $n(n–1)/2$ Korrelationen werden nur n Beta-Faktoren und die Varianz der Marktrendite benötigt.

Beispiel 36: Wir betrachten die drei Wertpapiere aus Beispiel 35. Deren Beta-Faktoren betragen β_1=0.8, β_2=0.9 und β_3=1.2. Für die Marktrendite gilt σ_m=0.0075. Das Delta-Äquivalent beträgt 0.8·250+0.9·3000+1.2·60=2972. Man erhält VaR(0.01)=51.9.

Aufgabe 15: Verwenden Sie die Daten für drei der Aktien aus Aufgabe 8. Nehmen Sie an, dass Sie je zehn Stück der drei Aktien in einem Portfolio halten. Berechnen Sie das Delta-Äquivalent und den VaR(0.01) für das Portfolio.

Zwei Risikofaktoren

Wir betrachten nun ein Portfolio, das auf zwei Risikofaktoren zurückgeführt werden kann: auf einen Marktindex und einen Wechselkurs (z.B. drei Aktien und ein Kassabestand in einer Fremdwährung). In diesem Fall wird die Wertänderung des Portfolios auf Basis der Delta-Äquivalente bezüglich der Rendite des Marktindex und der Rendite der Fremdwährung dargestellt:

$$\Delta W_p = \delta_m R_m + \delta_f R_f.$$

Der VaR des Portfolios wird unter Beachtung der Korrelation zwischen den Renditen R_m und R_f berechnet:

$$\mathrm{VaR}_p = \sqrt{\boldsymbol{V}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{V}} \qquad \boldsymbol{V} = [\underbrace{-\delta_m \sigma_m z_\alpha}_{\mathrm{VaR}_m} \quad \underbrace{-\delta_f \sigma_f z_\alpha}_{\mathrm{VaR}_f}]'.$$

VaR_m resultiert aus einer isolierten Änderung des Risikofaktors 'Marktindex' (der Wechselkurs wird konstant gehalten). VaR_f ist analog *nur* auf Änderungen im Wechselkurs zurückzuführen. δ_f ist in diesem Fall der aktuelle Marktwert des Kassabestands in Euro (oder lokaler Währung) δ_f=W·F, wobei F der aktuelle Wechselkurs (lokale Währung je Einheit Fremdwährung; z.B. 0.8 Euro je USD) und W der aktuelle Wert der Kassaposition in der Fremdwährung ist. Für den Fall dass der Wechselkurs als Fremdwährung je Einheit lokaler Währung definiert ist (z.B. 1.25 USD je Euro) dreht sich das Vorzeichen der Renditen R_f und auch die Korrelation zwischen R_f und anderen Risikofaktoren um.

Beispiel 37: Wir betrachten die drei Wertpapiere aus Beispiel 36 und einen Kassabestand von 6000 USD. Die Euro-USD Rendite hat eine Standardabweichung von σ_f=0.007 und eine Korrelation von ρ=0.1 mit der Marktrendite. Der aktuelle Wechselkurs beträgt F=0.81. Der VaR der Fremdwährungsposition beträgt

$$\mathrm{VaR}_f(0.01) = -(6000 \cdot 0.81) \cdot 0.007(-2.326) = 79.1.$$

Für die gesamte Position aus Aktien und Fremdwährung erhält man

$$\mathrm{VaR}_p(0.01) = [51.9 \quad 79.1] \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 51.9 \\ 79.1 \end{bmatrix} = 98.9.$$

Portfolio aus Aktien in Fremdwährung

Wenn Aktienpositionen im Ausland betrachtet werden, werden zwei Risikofaktoren berücksichtigt: ein Faktor für die Fremdwährung und ein Faktor für den Marktindex im Ausland (d.h. die Renditen einzelner Aktien werden wie in Gleichung (17) durch das Produkt aus Beta-Faktor und Marktrendite ersetzt). Zunächst betrachten wir die Berechnung der

Wertänderung des Marktwerts in lokaler Währung. Wenn der Wert einer Aktie in Fremdwährung mit X_t und der Wechselkurs mit F_t bezeichnet wird, gilt für die Wertänderung der Position

$$\Delta W = X_t F_t - X_{t-1} F_{t-1} = X_{t-1}(1+R_x) F_{t-1}(1+R_f) - X_{t-1} F_{t-1},$$

wobei R_x und R_f die diskreten Renditen der Aktie und der Fremdwährung bezeichnen. Man erhält daher

$$\Delta W = X_{t-1} F_{t-1}(R_x + R_f + R_x R_f) \approx X_{t-1} F_{t-1}(R_x + R_f).$$

Der multiplikative Term $R_x R_f$ wird üblicherweise vernachlässigt, was vor allem dann gerechtfertigt ist, wenn ein sehr kurzer Zeitraum betrachtet wird. Bei Verwendung von stetigen Renditen Y_x und Y_f fällt der multiplikative Term weg; es gilt folgende Beziehung:

$$\Delta W = X_{t-1} \exp\{Y_x\} F_{t-1} \exp\{Y_f\} - X_{t-1} F_{t-1} = X_{t-1} F_{t-1}[\exp\{Y_x + Y_f\} - 1].$$

Beispiel 38: Angenommen der Wert einer Aktie steigt von 950 auf 960 USD während sich der Wechselkurs von 0.84 auf 0.81 (Euro pro USD) ändert. Die Wertänderung in Euro beträgt $950 \cdot 0.84$–$960 \cdot 0.81$=798.0–777.6=–20.4. Anhand der diskreten Renditen R_x=0.0105 und R_f=–0.0357 erhält man $950 \cdot 0.84$(0.0105–0.0357)=–20.1. Die Diskrepanz zu –20.4 ist auf das Fehlen des multiplikativen Terms $R_x R_f$ zurückzuführen.

Nun betrachten wir die Wertänderung eines Portfolios aus n Aktien und ersetzen die Rendite einzelner Aktien R_{xi} durch $\beta_i R_m$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} q_i X_i F(\beta_i R_m + R_f).$$

q_i bezeichnet die Menge der gehaltenen Stück von Aktie i, X_i den Kurs von Aktie i im Zeitpunkt t und F den Wechselkurs in t. Wir definieren das Delta-Äquivalent

$$\delta_m = F \sum_{i=1}^{n} q_i X_i \beta_i$$

und können damit die gesamte Wertänderung für das Aktienportfolio in Fremdwährung berechnen:

$$\Delta W = \delta_m R_m + \delta_f R_f.$$

Der VaR wird unter Verwendung des Vektors $\boldsymbol{V}$ mit den beiden Komponenten

$$V_m = -\delta_m \sigma_m z_\alpha \qquad V_f = -\delta_f \sigma_f z_\alpha$$

und unter Berücksichtigung der Korrelation zwischen Marktrendite und Rendite des Wechselkurses aus $\sqrt{\boldsymbol{V}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{V}}$ ermittelt.

Beispiel 39: In der folgenden Tabelle wird das Delta-Äquivalent für drei Aktien unter Berücksichtigung des Wechselkurses von 0.81 berechnet:

	Wert ($)	Stück	β	δ_m (€)	δ_f (€)
Aktie 1	960	10	0.70	5443.2	7776
Aktie 2	40	50	1.10	1782.0	1620
Aktie 3	120	20	1.20	2332.8	1944
Portfolio				9558.0	11340.0

Für die Rendite des ausländischen Marktindex gilt σ_m=0.008. σ_f=0.007 und ρ=0.1 werden aus Beispiel 37 übernommen. Die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{V}$ sind

$$V_m = -9558 \cdot 0.008(-2.326) = 177.9 \qquad V_f = -11340 \cdot 0.007(-2.326) = 184.7$$

und VaR(0.01)=268.9.

Zukünftige Zahlungen

Die VaR-Berechnung von zukünftigen Zahlungen beruht auf dem Barwert der Zahlungen. Als Risikofaktoren werden dabei Abzinsungsfaktoren d^m verwendet, die auf der Spot-Rate r für die Laufzeit m beruhen (z.B. d^m=$(1+r)^{-m}$). Der VaR für eine Zahlung C_m wird wie folgt berechnet:

$$\mathrm{VaR}(\alpha) = -C_m d^m \sigma_m z_\alpha.$$

σ_m ist die Standardabweichung der Renditen der Diskontierungsfaktoren $R_t(m)$, die wie folgt berechnet werden:

$$R_t(m) = \frac{d_t^m - d_{t-1}^m}{d_{t-1}^m}.$$

Üblicherweise werden Zahlungen nur bestimmten Laufzeiten im Abstand von einem Monat (bei Zahlungen innerhalb eines Jahres) oder einem Jahr zugeordnet. Daher benötigt man Volatilitäten und Korrelationen der Diskontierungsfaktoren nur für eine begrenzte Anzahl von Laufzeiten und kann so den Rechenaufwand reduzieren.

6 Optionen

6.1 Grundlagen der Optionsbewertung

Wir beschreiben nun grundlegende Überlegungen zur *Bewertung* einer Call-Option[19] mit Ausübungspreis X. Dazu werden zunächst stark vereinfachende Annahmen getroffen. Es gibt nur zwei Zeitpunkte t=0 und t=T; T ist die Laufzeit (*maturity*) der Option. Es gibt zwei Wertpapiere: eine Anleihe mit Zinssatz r und eine Aktie mit Kurs S_0 auf die der Call geschrieben ist. Die Aktie kann in T nur zwei mögliche Werte annehmen: entweder ihr Preis steigt auf S_u=S_0(1+u) oder ihr Kurs fällt auf S_d=S_0(1+d) (d<0). Der (Bar)Wert der Option C_0 (der Optionspreis oder die Prämie) soll bestimmt werden.

Folgende Ansätze werden dazu vorgestellt:

1. bei der Replikation (oder auch Duplikation) wird in t=0 ein Portfolio aus Aktie und Anleihe gebildet, das das Zahlungsprofil des Calls in T *exakt* nachbildet.

2. bei der Bildung eines risikolosen Portfolios (*hedging*) wird in t=0 ein Portfolio aus Option und Aktie gebildet, das in T in jedem möglichen Zustand denselben Wert hat.

3. bei der risikoneutralen Bewertung wird ein 'Erwartungswert' für den Preis der Option gebildet. Dabei werden allerdings nicht empirische Wahrscheinlichkeiten, sondern so genannte risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten verwendet. Der so definierte Erwartungswert kann mit dem risikolosen Zinssatz abgezinst werden.

6.1.1 Replikation

Zunächst betrachten wird das Zahlungsprofil des Calls. Die Option wird ausgeübt, wenn S_t über X liegt; wenn nicht, verfällt die Option wertlos. Der Wert der Call-Option im Zeitpunkt T beträgt daher

$$C_T = \max[S_T - X; 0].$$

Zur Replikation des Calls wird ein Portfolio aus Aktie und Anleihe gesucht, das das Zahlungsprofil des Calls in T *exakt* nachbildet. Wenn es nur zwei mögliche Werte von S_T gibt, muss dieses Portfolio folgende Bedingungen erfüllen:

$$\delta S_u + B(1 + r) = S_u - X = C_u$$

$$\delta S_d + B(1 + r) = 0 = C_d,$$

wobei $S_u \geq X$ und $S_d \leq X$. δ ist die Anzahl der Aktien und B der (Bar)Wert der Anleihen, die gehalten werden. Nun wendet man das Prinzip des *law of one price* an, das besagt: wenn zwei Wertpapiere oder Portfolios dieselben (zukünftigen) Zahlungen aufweisen, dann müssen ihre (derzeitigen) Marktpreise übereinstimmen. Demnach muss das Portfolio aus Aktie und Anleihe denselben (Bar)Wert wie die Call-Option haben:

$$C_0 = \delta S_0 + B.$$

[19] Für Grundlagen von Optionen verweisen wir auf Geyer et al.[5].

Die Lösung des Gleichungssystems lautet

$$\delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)} \qquad B = \frac{C_u - \delta S_u}{(1+r)} = \frac{C_d - \delta S_d}{(1+r)}.$$

Wie wir später sehen werden kann dieses einfache Bewertungsprinzip auch auf mehrere Perioden erweitert werden.

Beispiel 40: S_0=70; u=0.06; d=–0.03; r=0.05. Wie hoch ist der Preis für eine Call-Option mit Ausübungspreis X=73? Der Aktienkurs beträgt entweder S_u=74.2 oder S_d=67.9. Der Call hat bei Ausübung einen Wert von 1.2. Die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 74.2 & 1.05 \\ 67.9 & 1.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lautet: δ=0.190476 und B=–12.31746. Wenn 0.19 Aktien gehalten werden und ein Kredit in Höhe von 12.32 aufgenommen wird, hat das Portfolio aus Aktie und Anleihe entweder einen Wert von

$$0.190476 \cdot 74.2 - 12.31746 \cdot (1+0.05) = 1.2$$

oder

$$0.190476 \cdot 67.9 - 12.31746 \cdot (1+0.05) = 0.$$

Nach dem *law of one price* muss der Barwert der Option gleich hoch wie der Barwert des Portfolios aus Aktie und Anleihe sein:

$$C_0 = 0.190476 \cdot 70 - 12.31746 = 1.015873.$$

Wir weisen auf drei Merkmale dieser Herleitung hin:

1. Die Wahrscheinlichkeiten für 'up' und 'down' werden nicht benötigt. Der Wert der Option hängt jedoch von u und d und damit von der möglichen Schwankungsbreite des Aktienkurses ab.

2. Der Barwert der Option wird nicht aus dem Erwartungswert von C_T berechnet.

3. Auch wenn man den Erwartungswert von C_T bestimmt hätte, bliebe unklar, mit welchem (risikoadjustierten) Zinssatz dieser Erwartungswert abgezinst werden müsste.

6.1.2 Risikoloses Portfolio (Hedging)

Ein zweiter Ansatz beruht darauf ein Portfolio aus Aktie und Option zu bilden, dass in beiden möglichen Zuständen *denselben* Wert hat. Dieses Portfolio ist daher risikolos und sein Wert kann mit dem risikolosen Zinssatz abgezinst werden.

Das Portfolio wird durch den Kauf von δ Aktien zum Kurs S_0 und dem Leerverkauf einer Call-Option gebildet. Wenn die Option ausgeübt wird, hat das Portfolio den Wert

$$\delta S_0(1+u) - C_u \qquad (C_u = S_u - X).$$

Wenn der Kurs der Aktie fällt, hat das Portfolio den Wert

$$\delta S_0(1+d) - C_d \qquad (C_d = 0).$$

δ wird so bestimmt, dass das Portfolio aus Aktie und Option *in beiden Zuständen* denselben Wert hat:

$$\delta S_u - C_u = \delta S_d - C_d \quad \Longrightarrow \quad \delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}. \tag{18}$$

Weil dieses Portfolio risikolos ist, kann der identische (nicht zustandsabhängige) Wert in T mit dem risikolosen Zinssatz abgezinst werden. Dieser Barwert muss gleich dem Wert des Portfolios in t=0 sein:[20]

$$\delta S_0 - C_0 = [\delta S_u - C_u]/(1+r).$$

Daraus folgt der Wert der Option:

$$C_0 = \delta S_0 - [\delta S_u - C_u]/(1+r). \tag{19}$$

Beispiel 41: Anhand der Angaben aus Beispiel 40 beträgt der Wert des Portfolios in den beiden Zuständen

$$\delta \cdot 74.2 - 1.2 = \delta \cdot 67.9.$$

Daraus folgt δ=0.190476. Der Wert des Portfolios in T beträgt $0.190476 \cdot 67.9$=$12.9\dot{3}$ und dessen Barwert $0.190476 \cdot 67.9/1.05$=12.31746. Der Wert der Option ist daher

$$C_0 = 0.190476 \cdot 70 - 12.31746 = 1.015873.$$

6.1.3 Risikoneutrale Bewertung

Der Barwert der Option kann unter Verwendung von (19) auch wie folgt angeschrieben werden:

$$C_0 = \frac{\delta S_0(1+r) - \delta S_u + C_u}{(1+r)} = \frac{\delta S_0(r-u) + C_u}{(1+r)}.$$

Nach Substitution von δ aus (18) und einigen Umformungen erhält man

$$C_0 = \left[C_u \frac{(r-d)}{(u-d)} + C_d \frac{(u-r)}{(u-d)}\right] \cdot \frac{1}{(1+r)}.$$

Definiert man

$$q_u = \frac{(r-d)}{(u-d)} \qquad q_d = (1-q_u) = \frac{(u-r)}{(u-d)},$$

kann man den Ausdruck weiter vereinfachen:

$$C_0 = [q_u C_u + q_d C_d]/(1+r) = [q C_u + (1-q) C_d]/(1+r) \qquad (q = q_u).$$

q_u und q_d liegen immer zwischen 0 und 1 und summieren auf 1. Sie können daher als Wahrscheinlichkeiten[21] interpretiert werden. Der Preis des Calls ist daher ein Erwartungswert des Calls in T, der mit dem (risikolosen) Zinssatz r abgezinst wird. Voraussetzung ist

[20] Für den Wert in eckigen Klammern könnte auch δS_d–C_d verwendet werden.

[21] Es muss u>r>d gelten, damit q_u bzw. q_d nicht negativ werden.

allerdings, dass dieser Erwartungswert mit den so genannten **risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten** q_u und q_d gebildet wird.

Wenn wir den Erwartungswert von S_T auch unter Verwendung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten berechnen, erhalten wir

$$\mathrm{E}_q[S_T] = q_u S_u + q_d S_d = q S_u + (1-q) S_d.$$

Unter Berücksichtigung der Definitionen von q_u und q_d, erhalten wir

$$\mathrm{E}_q[S_T] = S_0(1+r)^T.$$

Mit anderen Worten: die Verwendung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit q impliziert die Annahme, dass die Rendite der Aktie dem risikolosen Zinssatz entspricht. Hätte man den Erwartungswert von S_T mit den tatsächlichen (empirischen oder objektiven) Wahrscheinlichkeiten gebildet, wäre die Diskontierung nicht mit dem risikofreien Zinssatz möglich.

Wenn die Wahrscheinlichkeiten q_u und q_d durch $(1+r)$ dividiert werden, erhält man die so genannten **Zustandspreise** (auch Arrow-Debreu Preise)

$$\pi_u = q_u/(1+r) \qquad \pi_d = q_d/(1+r),$$

die auch als stochastische Abzinsungsfaktoren bezeichnet werden. Mit Hilfe der Zustandspreise kann der Wert der Option aus

$$C_0 = \pi_u C_u + \pi_d C_d$$

ermittelt werden. Der Begriff Zustandspreis beruht auf folgender Frage: welchen Barwert hat eine Zahlung von *einer* Geldeinheit, wenn der Zustand 'up' eintritt (analog für 'down')? Zustandspreise können direkt aus folgender Überlegung hergeleitet werden, die wir anhand von π_d demonstrieren. π_d hat im Zustand 'down' den Wert eins und sonst null. Wir verwenden den Ansatz aus Kapitel 6.1.1 und suchen ein Portfolio aus Aktie und Anleihe, das dasselbe Zahlungsprofil wie π_d hat. Wir können die Lösung aus Kapitel 6.1.1 für C_d=1 und C_u=0 übernehmen und erhalten

$$\delta = \frac{-1}{S_0(u-d)} \qquad B = \frac{1-\delta S(1+d)}{(1+r)} = \frac{(1+u)}{(u-d)(1+r)}.$$

Der Zustandspreis π_d ist daher gegeben durch

$$\pi_d = \delta S_0 + B = \frac{(u-r)}{(u-d)(1+r)}.$$

Beispiel 42: Anhand der Angaben aus Beispiel 40 erhält man q_u=(0.05+0.03)/(0.06+0.03)= $0.\dot{8}$ und q_d=$0.\dot{1}$. Die Zustandspreise sind π_u=q_u/1.05=0.84656 und π_d=q_d/1.05=0.10582 und der Wert der Option beträgt daher

$$C_0 = (0.\dot{8}\cdot 1.2 + 0.\dot{1}\cdot 0)/(1+0.05) = 0.84656\cdot 1.2 + 0.10582\cdot 0 = 1.015873.$$

Aufgabe 16: S_0=350; u=0.03; d=–0.05; r=0.02. Wie hoch ist der Preis für eine Call-Option mit Ausübungspreis X=352? Bestimmen Sie den Optionspreis durch Replikation, Hedging, risikoneutrale Bewertung und mit Zustandspreisen.

6.1.4 Arbitrage

Alle bisher dargestellten Ansätze führen zum selben Wert der Call-Option. Wenn der Marktwert von diesem Wert abweicht (und die Bewertung von C_0 korrekt ist), würde sich die Möglichkeit zur Arbitrage ergeben. Arbitrage bedeutet, dass durch entsprechende Transaktionen ein risikoloser Gewinn erzielt werden kann.

Die folgende 'Geschichte' stammt aus Varian[18], S.55.

> An economics professor and a Yankee farmer were waiting for a bus in New Hampshire. To pass the time, the farmer suggested that they play a game. "What kind of game would you like to play?" responded the professor. "Well," said the farmer, "how about this: I'll ask a question, and if you can't answer my question, you give me a dollar. Then you ask me a question and if I can't answer your question, I'll give you a dollar."
>
> "That sounds attractive," said the professor, "but I do have to warn you of something: I'm not just an ordinary person. I'm a professor of economics."
>
> "Oh," replied the farmer, "In that case we should change the rules. Tell you what: if you can't answer my question you still give me a dollar, but if I can't answer yours, I only have to give you fifty cents."
>
> "Yes," said the professor, "that sounds like a fair arrangement."
>
> "Okay," said the farmer, "Here's my question: what goes up the hill on seven legs and down the hill on three legs?"
>
> The professor pondered this riddle for a while and finally replied. "Gosh, I don't know... what does go up the hill on seven legs and down the hill on three legs?"
>
> "Well," said the farmer, "I don't know either. But if you give me your dollar, I'll give you my fifty cents!"
>
> The above story is an illustration of *arbitrage*: arranging a transaction involving no cash outlay that results in a sure profit. As this story shows, opportunities for arbitrage do occasionally arise. But in a well-developed market with rational, profit-seeking individuals such opportunities should be very rare indeed, since profit-maximizing agents will attempt to exploit arbitrage opportunities as soon as they arise.

Allgemein kann man die Möglichkeit zur Arbitrage anhand folgender Überlegungen prüfen[22]. Wir definieren eine $n \times k$ Matrix $\boldsymbol{Z}$, die die zukünftigen Marktwerte für jedes von n Wertpapieren (in unserem Fall: Option, Aktie und Anleihe) und jeden von k möglichen Zuständen (in unserem Fall 'up' und 'down) enthält. Außerdem definieren wir einen $n \times 1$ Vektor $\boldsymbol{p}$ der aktuellen Marktwerte (Preise) jedes Wertpapiers und den $k \times 1$ Vektor $\boldsymbol{\pi}$ der Zustandspreise. Damit können wir den Wert p_i von Wertpapier i wie folgt definieren:

$$p_i = \sum_{j=1}^{k} Z_{ij} \pi_j \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\pi}.$$

Der Zustandspreis π_j ist der (Bar)Wert *einer* Geldeinheit im Zustand j und Z_{ij} ist der Marktwert des Wertpapiers im Zustand j. Da die Zustände einander ausschließen, erhält man den Preis p_i aus der Summe über alle möglichen Zustände.

Die Eignung dieses Ansatzes zur Bewertung eines Wertpapiers setzt voraus, dass es keine Arbitragemöglichkeiten gibt (*no arbitrage pricing*). Es darf keine Marktpreise geben, die

[22] Für Details verweisen wir auf Varian[18], Ingersoll[10], S.52 und Spremann[17], S.487f.

ein so genanntes *free lunch* ermöglichen. Portfolios, die positive Zahlungen ergeben, müssen auch etwas kosten. Die *no arbitrage* Bedingung lautet:

$$\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{p}'\boldsymbol{\theta} \geq 0.$$

$\boldsymbol{\theta}$ wird auch als **Handelsstrategie** bezeichnet. Ein negatives (positives) Element in $\boldsymbol{\theta}$ bedeutet einen Verkauf (Kauf) in t=0. Wenn die *no arbitrage* Bedingung erfüllt ist, muss es einen eindeutig definierten Vektor $\boldsymbol{\pi}$ der Zustandspreise geben, für den die Beziehung $\boldsymbol{p}$=$\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\pi}$ gilt. Ist das nicht der Fall (die beiden Möglichkeiten schließen einander aus), dann existiert ein Portfolio der Wertpapiere für das gilt:

$$\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{p}'\boldsymbol{\theta} < 0.$$

Eine 'optimale' Handelsstrategie kann man auf Basis eines linearen Programms oder der Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{p}' \\ \boldsymbol{Z}' \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} g \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

bestimmen, wobei g ein vorgegebener Gewinn (Zahlungsüberschuss) ist. Alternativ kann man auch fordern, dass $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{\theta}$=0 und $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\theta}$ in *zumindest einem* zukünftigen Zustand größer als null ist. In diesem Fall spricht man auch von einer *selbstfinanzierenden* Handelsstrategie.

Beispiel 43: Wenn der Marktpreis der Call-Option aus Beispiel 40 C_0=1.0 (anstelle von C_0=1.015873) beträgt, erhält man

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{p}' \\ \boldsymbol{Z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0 & -70 & -1 \\ 1.2 & 74.2 & 1.05 \\ 0 & 67.9 & 1.05 \end{bmatrix}.$$

Mit der Strategie $\boldsymbol{\theta}$=$(6.3\ -1.2\ 77.6)'$ kann man in t=0 einen Gewinn (Zahlungsüberschuss) von 0.1 erzielen. Man kauft 6.3 Optionen zum Preis 1.0, verkauft 1.2 Aktien zum Kurs 70 und vergibt einen Kredit in Höhe von 77.6. Damit wird ein sofortiger Zahlungsüberschuss von 0.1 erzielt. In Zustand 'up' werden die Optionen zum Kurs 1.2 verkauft, die Aktie zum Kurs 74.2 gekauft und aus dem Kredit erhält man eine Einzahlung von 81.48. Die Summe aller Zahlungen ist $6.3\cdot1.2-1\cdot74.2+1.05\cdot77.6$=0. Im Zustand 'down' sind die Optionen wertlos und die Zahlungen aus Aktie und Kredit betragen $-1.2\cdot67.9+1.05\cdot77.6$=0. Man hat den Gewinn von 0.1 in t=0 daher risikolos erzielt. Für einen Marktpreis von C_m=1.1 kann man denselben Gewinn mit der Strategie $\boldsymbol{\theta}$=$(1.189\ -0.226\ 14.64)'$ erzielen.

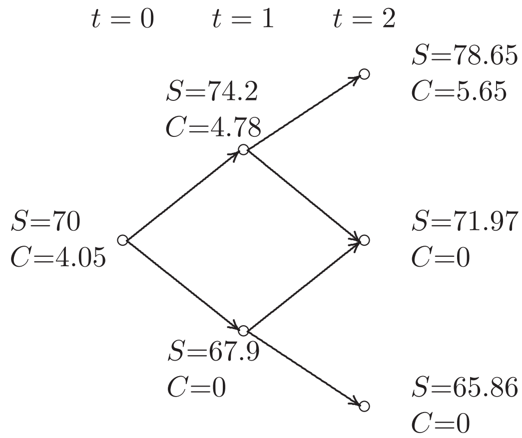
Zusammenfassend kann man zu den dargestellten Ansätzen zur Optionsbewertung festhalten:

1. Alle Ansätze beruhen auf der *no arbitrage* Bedingung.

2. Die Lösung ist unabhängig von der Wahrscheinlichkeit für 'up' oder 'down', ist aber abhängig von u und d.

3. Die Risikoeinstellung des Investors ist irrelevant.

Abb.14: Binomialbaum für die Zahlen aus Beispiel 44.



6.1.5 Mehr als zwei Zeitpunkte – Binomialbäume

Wenn die Betrachtung auf mehr als zwei Zeitpunkte ausgedehnt wird, kann man einen Binomialbaum wie in Abb.14 als Grundlage der Darstellung und Bewertung verwenden. Die vereinfachenden Annahmen aus Kapitel 6.1 werden aufrecht erhalten. Im Fall von drei Perioden sind für die Entwicklung der Aktie folgende Sequenzen möglich: (u, u, u), (u, u, d), (u, d, u), (u, d, d), (d, u, u), (d, u, d), (d, d, u), (d, d, d). Dabei ist zu beachten, dass z.B. (u, u, d) und (u, d, u) zum selben Preis führen.

Für die Bewertung des Calls wird zunächst für jeden Knoten zum Zeitpunkt der Ausübung der Wert des Calls aus C_T=max$[S_T–X; 0]$ bestimmt. Nun wird für alle Knoten im Zeitpunkt T–1 der Wert des Calls unter Verwendung der Zustandspreise π_u und π_d bestimmt:

$$C_{T-1} = \pi_u C_{u,T} + \pi_d C_{d,T}.$$

Die Zustandspreise sind für die Dauer einer Periode definiert und können bei angenommener Konstanz von u und d in jedem Zeitpunkt angewendet werden. Da es in jedem Knoten genau zwei folgende Knoten gibt, kann diese Vorgangsweise für alle Knoten und Zeitpunkte bis t=0 angewendet werden. Der Wert des Calls kann allgemein wie folgt berechnet werden:

$$C_0 = \sum_{t=0}^{T} \binom{T}{t} \pi_u^t \pi_d^{T-t} \max[S_0(1+u)^t(1+d)^{T-t} - X; 0]. \tag{20}$$

Beispiel 44: Wie verwenden die Angaben aus Beispiel 40 für den Fall T=2. Die möglichen Aktienkurse für t=1 wurden schon in Beispiel 40 ermittelt. Durch Anwendung der Werte von u und d erhält man für t=T *drei* mögliche Kurse (siehe Abb.14). Der Wert des Calls im ersten Knoten beträgt 78.65–73; in den beiden anderen Knoten verfällt die Option wertlos. Durch Anwendung der Zustandspreise 0.84656 und 0.10582 kann der Wert des Calls in t=1 auf Basis der beiden folgenden Werte in t=2 ermittelt werden. In einem der beiden Knoten in t=1 hat der Call den Wert null; immer anderen Knoten den Wert 5.65·0.846561+0·0.106=4.78. Durch nochmalige Anwendung der Zustandspreise erhält man den Preis des Calls von 4.05.

6.2 Optionsbewertung nach Black, Scholes und Merton

Die Optionsbewertung nach Black, Scholes und Merton (in der Folge BSM) beruht auf der Annahme, dass die stetigen Renditen des der Option zugrunde liegenden Wertpapiers (*underlying*) normalverteilt sind. Man kann zeigen, dass dies der Annahme einer Lognormalverteilung für den Preis des Basiswerts entspricht. Es kann aber auch gezeigt werden, dass dieselbe Bewertungsformel resultiert, wenn das Binomialmodell (20) für Zeitintervalle angewendet wird, deren Länge gegen null geht (siehe Cox/Rubinstein[3], S.208). Die Lösung von BSM beruht auf dem Ansatz ein risikoloses Portfolio aus Aktie und Option in *stetiger Zeit* zu bilden. Aus der Lösung der resultierenden partiellen Differentialgleichung haben BSM den Wert des Calls bestimmt (siehe Hull[9], S.291).

Der (Bar)Wert einer Call-Option nach BSM ist

$$C_0 = S_0 N(d_1) - X\exp\{-rT\}N(d_2),$$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/X) + (r + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

und $N(z)$ ist der Wert der kumulierten Normalverteilung an der Stelle z (z.B. $N(-1.645) = 0.05$).

Aufgrund der **Put-Call Parität** (siehe Hull[9], S.208)

$$C_0 + X\exp\{-rT\} = P_0 + S_0$$

gilt für den Wert einer Put-Option (mit demselben Ausübungspreis):[23]

$$P_0 = X\exp\{-rT\}N(-d_2) - S_0 N(-d_1).$$

Der BSM-Preis kann aus allen gezeigten Prinzipien der Bewertung hergeleitet werden. Daher kommt in der Formel nicht die erwartete Rendite des Basiswerts, sondern nur deren Volatilität σ (die den Werten von u und d im Binomialmodell entspricht) und der risikofreie Zinssatz r vor. Üblicherweise werden r und σ in jährlichen (p.a.) Einheiten angegeben und T wird als Bruchteil eines Jahres angegeben.

> **Beispiel 45:** Der BSM Wert eines Calls mit S_0=70, σ=0.2 (p.a.), mit Ausübungspreis X=73, r=0.05 (p.a.) und einer Laufzeit von 20 Wochen beträgt C_0=2.755 (d_1=−0.1213; d_2=–0.2453). Dazu wird die Laufzeit T=20/52=0.38462 zur Skalierung von σ und r verwendet.

Die Schätzung der Volatilität muss auf Basis einer Stichprobe von *stetigen* Renditen $y_t = \ln S_t/S_{t-1}$ erfolgen. Wenn z.B. täglich erhobene Daten vorliegen und die Standardabweichung der Stichprobe beträgt s, dann wird in der BSM-Formel der Wert $s\cdot\sqrt{252}$ für σ eingesetzt. 252 entspricht der (durchschnittlichen) Anzahl von Handelstagen in einem Jahr. Die Volatilität σ (p.a.) und die beiden Parameter u und d des Binomialmodells können wie folgt verknüpft werden:

$$u = \exp\{\sigma\sqrt{\Delta t}\} - 1 \qquad d = \exp\{-\sigma\sqrt{\Delta t}\} - 1,$$

wobei σ die Volatilität p.a. ist und Δt den jeweiligen Bruchteil eines Jahres angibt (z.B. 1/52 wenn die Laufzeit in Wochen angegeben ist).

[23] Die Herleitung beruht auf der Verwendung der Formel den Barwert einer Call-Option und der Eigenschaft $N(-d)=1-N(d)$.

Beispiel 46: Aus den Angaben aus Beispiel 45 erhält man u=exp$\{0.2\sqrt{1/52}\}-1$= 0.0281 und d=–0.02735. Die entsprechende risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für 'up' beträgt q_u=(0.05/52+0.02735)/(0.0281+0.02735)=0.5104 mit Zustandpreis π_u= 0.5104/(1+0.05/52)=0.51. Unter Verwendung der Formel (20) erhält man C_0=2.772.

6.3 Hedging Strategien

In Kapitel 6.1.2 haben wir gezeigt, wie ein risikoloses Portfolio aus Option und Aktie bei Betrachtung *einer* Periode im Binomialmodell ermittelt werden kann. Im Fall von mehreren Perioden muss die Anzahl der zu haltenden Aktien *ständig* angepasst werden, damit die Position risikolos bleibt. Wir werden nur die Anpassung an Änderungen im Aktienkurs zeigen, was mit dem Begriff **Delta-Hedging** bezeichnet wird. Im allgemeinen können auch Änderungen in der Restlaufzeit, der Volatilität und des risikofreien Zinssatzes berücksichtigt werden (siehe Hull[9], S.360f).

Wenn z.B eine Finanzinstitution eine Call-Option verkauft hat, kann zur Absicherung eine Aktie zum Kurs S_0 gekauft werden (*covered position*). Bis zum Ende der Laufzeit werden keine weiteren Maßnahmen gesetzt (so genannte *hedge&forget* Strategie). Wenn die Option jedoch wertlos verfällt (weil der Aktienkurs unter X gefallen ist), kann der Verlust aus der Aktie den Erlös aus dem Verkauf der Option übersteigen. Wenn keine Aktien gehalten werden (*naked position*) und die Option wird ausgeübt, muss eine Aktie zum Kurs S_T gekauft werden. Der Verlust in Höhe von (S_T–X) kann ebenfalls den Erlös aus dem Verkauf der Option übersteigen.

Offenbar ist keine der beiden (Extrem)Varianten sinnvoll. Aber auch ein Kompromiss aus *covered* und *naked* Position ist im allgemeinen nicht zielführend. Wenn in t=0 zur Absicherung δ Aktien gekauft werden, fällt eine Zahlung in Höhe von

$$nC_0 - \delta S_0$$

an, wobei n die Anzahl der verkauften Optionen ist. Wenn im Zeitpunkt T die Option ausgeübt wird, fällt eine Zahlung in Höhe von

$$(\delta - n)S_T + nX$$

an. Wenn die Option nicht ausgeübt wird, beträgt die (Ein)Zahlung δS_T.

Beispiel 47: Der Schreiber eines Calls mit C_0=3 auf n=50 Aktien mit Kurs S_0=70 und Ausübungspreis X=73 kauft zur Absicherung δ=30 Aktien in t=0. Wenn r=0 und der Kurs der Aktie am Ende der Laufzeit (a) S_T=80 bzw. (b) S_T=60 beträgt: wie hoch ist sein Gewinn/Verlust?
Im Fall (a) wird die Option ausgeübt. Der Gewinn beträgt 50·3–30·70–20·80+50·73=100.
Im Fall (b) verfällt die Option und der Verlust beträgt 50·3–30·70+30·60=–150.

Beim Delta-Hedging wird die Anzahl der gehaltenen Aktien aufgrund von Änderungen im Aktienkurs kontinuierlich angepasst, sodass sich – im Idealfall – keine Wertänderung des Gesamtportfolios (aus Option und Aktie) ergibt. Außerdem sollte die Anzahl der gehaltenen Aktien während der Laufzeit so angepasst werden, dass am Verfallstag entweder keine oder n Aktien gehalten werden. Ein Portfolio, das diese Eigenschaft aufweist, wird als *delta-neutral* bezeichnet.

In Kapitel 6.1.2 haben wir gezeigt, dass im Binomialmodell die Anzahl der Aktien zur (perfekten) Absicherung durch (C_u–C_d)/(S_u–S_d) bestimmt ist. Analog kann man zeigen, dass die Anzahl der Aktien, die für eine delta-neutrale Position gehalten werden müssen, gleich der ersten Ableitung des Call-Preises nach dem Aktienkurs ist:

$$\delta_t = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} = N(d_t) \qquad d_t = \frac{\ln(S_t/X) + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Wenn der Aktienkurs um eine Einheit steigt, dann steigt der Preis des Calls um δ_t Einheiten. Für den Schreiber von n Calls bedeutet der Anstieg des Calls einen Verlust in Höhe von $n\delta_t$. Für die Anzahl x der zu haltenden Aktien, um diesen Verlust auszugleichen, muss gelten: $nx=n\delta_t$. In jedem Zeitpunkt gibt δ_t daher an, wie viele Aktien je Call gehalten werden müssen.

Beispiel 48: Der Schreiber des Calls aus Beispiel 47 kauft in t=0 zur Absicherung $n\cdot\delta_0$=50·0.373=19 (gerundet) Aktien, was zu einer Auszahlung von 70·19=1304 führt. Wenn der Aktienkurs nach einer Woche (in t=1) auf 71.1 steigt beträgt δ_1=0.432 (wobei auch die verkürzte Restlaufzeit berücksichtigt wird). Zur Absicherung sind daher 50·0.432=22 Aktien nötig. Daher werden drei zusätzliche Aktien benötigt, was zu einer Auszahlung von 71.1·3=211 führt. Unter Berücksichtigung eines Zinssatzes von 5% sind daher insgesamt bis t=1 Auszahlungen in Höhe von 1304·(1+0.05/52)+211=1516 angefallen. Die weiteren Zahlungen im Zusammenhang mit der Absicherung sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

Woche (t)	S_t	d_1	δ_t	Anzahl gekauft/ verkauft	Ein- und Aus- zahlungen	kumulierte Zahlungen (inkl. Zinsen)
0	70.0	-0.3250	0.373	-19	-1304	-1304
1	71.1	-0.1713	0.432	-3	-211	-1516
2	74.3	0.3623	0.641	-10	-778	-2296
3	71.4	-0.1736	0.431	11	751	-1547
4	69.1	-0.6893	0.245	9	642	-907
5	69.3	-0.7302	0.233	1	44	-864
6	69.6	-0.7628	0.223	0	34	-830
7	70.9	-0.5236	0.300	-4	-275	-1106
8	68.9	-1.4051	0.080	11	759	-348
9	67.9	-2.5627	0.005	4	254	-95
10	68.8		0.000	0	18	-77
					gesamt:	-77
					pro Stück:	**-1.535**

Man erkennt, dass bei einem fallenden (steigenden) Kurs Aktien verkauft (gekauft) werden. Die Option verfällt nach zehn Wochen wertlos und der Schreiber des Calls hält in diesem Zeitpunkt keine Aktien mehr. Die Gesamtsumme aus Ein- und Auszahlungen unter Berücksichtigung von Zinsen beträgt −77 GE. Das entspricht einer Auszahlung von 1.535 pro Option. Der BSM-Preis der Option beträgt 1.505. Die Kosten der Absicherung sind c.p. umso näher beim BSM-Preis, je häufiger die Anpassung des Portfolios durchgeführt wird.

Aufgabe 17:

1. Verwenden Sie die (täglichen oder wöchentlichen) Kurse einer der Aktien aus den Aufgaben 1, 7 oder 10. Definieren Sie eine Stichprobe so, dass Sie bei der Schätzung von σ ca. zehn bis fünfzehn Kurse am Ende der Zeitreihe weglassen. Wählen Sie je einen Ausübungspreis über bzw. unter dem letzten Kurs in der Stichprobe. Bestimmen Sie in beiden Fällen den BSM Wert einer Call-Option unter der Annahme r=0.02.
2. Führen Sie eine Delta-Hedging Strategie für die zehn bis fünfzehn Zeitpunkte durch, die Sie unter 1. weggelassen haben. Vergleichen Sie die Kosten der Strategie mit den BSM Preisen.

Literatur

[1] Benninga S. (2001): *Financial Modeling*, 2nd edition, MIT Press: Cambridge.

[2] Brooks C. (2002): *Introductory Econometrics for Finance*, Cambridge University Press: Cambridge.

[3] Cox J.C./Rubinstein M. (1985): *Options Markets*, Prentice-Hall: Englewood-Cliffs.

[4] Geyer A./Pichler S. (1998): Aggregationsprobleme im Rahmen des Value-at-Risk Konzeptes, *BankArchiv*, **46**, 942–948.

[5] Geyer A./Hanke M./Littich E./Nettekoven M. (2003): *Grundlagen der Finanzierung*, Linde: Wien.

[6] Elton E.J./Gruber M.J. (1995): *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 5th edition, Wiley: New York.

[7] Grinold R.C./Kahn R.N. (2000): *Active Portfolio Management*, 2nd edition, MacGraw-Hill: New York.

[8] Hastings N.A.J./Peacock J.B. (1975): *Statistical Distributions*, Butterworth: London.

[9] Hull J. (2009): *Options, Futures and other Derivatives*, 7th edition, Prentice Hall: New Jersey.

[10] Ingersoll J.E. (1987): *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield.

[11] Kallberg J.G./Ziemba W.T. (1983): Alternative Utility Functions in Portfolio Selection, *Management Science*, **29**, 1257–1276.

[12] Markowitz H. (1952): Portfolio Selection, *Journal of Finance*, **52**, 77–91.

[13] J.P.Morgan/Reuters (1996): RiskMetrics™ – Technical Document, 4th edition; http://www.riskmetrics.com/rmcovv.html

[14] Nelson C.R./Siegel A.F. (1987): Parsimonious modeling of yield curves, *Journal of Business*, **60**, 474–489.

[15] Pratt J.W. (1992): Risk Aversion, in: *The New Palgrave Dictionary of Money & Finance*, Macmillan, London.

[16] Ruppert D. (2004): *Statistics and Finance*, Springer, New York.

[17] Spremann K. (1991): *Investition und Finanzierung*, 4. Auflage, Oldenburg, München.

[18] Varian H.R. (1987): The Arbitrage Principle in Financial Economics, *Journal of Economic Perspectives*, **1**, No. 2. 55–72.